ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis:

An. Dom.

M. DC. LXV.

LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli*. 1684.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

DE magnitudinis affectionibus & ſymptomatis communibus, quæ experientiam incurrunt, adeóque Mathematicis materiam hypotheſibus ſubminiſtrant, diſquiſiturum præfari ſubit & prænonere, quod planè conſcius ſim mihi quàm lubricum & anceps negotium aggrediar. Sunt enim ejuſmodi res, quas perdifficile ſit non explicando perplexiores reddere, non illuſtrando obſcurare; tam ferme tenuis & abſtractæ naturæ res, vix ut illas imaginatio comprehendere, juſtos ſingulis limites aſſignare, alias ab aliis ſecernere queat; ſubtiliſſimam adeò mentis aciem eludunt, & diſtinctas ipſarum idæas captanti fugaces elabuntur & evaneſcunt: ſic ut illis pleriſque non immeritò poſſit applicari, quod de tem-

pore dixisse perhibetur S. Augustinus, *Quid sit tempus, si nemo quærat à me scio, si quis interroget nescio.* Quid enim v. g. sit extensio, quid spatium, quid motus, qui de illis sermones conserit unusquisque, vel è vulgo se clarè putat intelligere, sin ipsorum mentem excutias, & dum ore proferunt ista vocabula quid mente cogitent explores, inextricabilibus plerosque laqueis irretitos cernes, hæsitantes animo, linguâ præpeditos. Imò post diligentissimam contemplationem cum exquisitissima cura de illis verba facientes, etiam subtilissimi Philosophi vix consona dicere possunt, aut alii aliis, aut sibimet iidem ipsis; nec ferè quisquam eas ita pertractat, ut non è dictis immania paradoxa, gravissimæque consequi videantur difficultates. Ex. g. Cartesius ex suo spatii conceptu deducit infinitam (vel idem efferendo mollius, indefinitam) mundanæ materiæ extensionem, nec non impossibilitatem vacui, & immediatam contiguitatem corporum antea distantium, annihilatis vel amotis corporibus intermediis, hisque cognata. Quæ velut à communi sensu abhorrentia, quam meritò non disputo, reprehendit & ex[illegible]lodit ejus æmulus Hobbius. At verò num [illegible]riora vel certiora, minus ἀσύστατα, ma[illegible] reponit ipse? Videamus paux[illegible]m: Spatium appellat corporis idæam [illegible] phantasma; locum spatii cum corpori[illegible]agnitudine coincidentiam; motum uni[illegible] loci relictionem, & alterius acquisition[illegible] Quis non videt quàm aut hæc repugn[illegible] sibi, vel admodum ridiculis obnoxia sin[illegible]consequentiis; talibus nempe locus ergò corporis, hujus videlicet

Cap. 7. de Corp.

scholæ,

ſcholæ, nil erit aliud quàm coincidentia phantaſmatis (mei, tui, cujuſvis) cum ſcholæ magnitudine. Quaſi verò Papa Romanus non incolat Vaticanas ædes, non Romæ verſetur, aſt ubique gentium collocetur in omnium quotquot ſunt, aut de eo cogitant, hominum phantaſiis? (quo pacto facilè concipiatur eſſe pontifex œcumenicus). Ergò motus, lapidis puta vel ſagittæ, fuerit unius coincidentiæ phantaſmatis cum magnitudine relictio, & alterius coincidentiæ acquiſitio; dúmque Turca movet exercitum in Hungariam, nil is aliud quàm in tua phantaſia diſcurſitat, in tuo cerebello caſtra metatur. At quomodo obſecro magnitudo corporis cum phantaſmate vel idæa mentis coincidat, congruat, coexiſtat? quomodo derelinqui vel acquiri poteſt coincidentia corporis cum phantaſmate? quomodo phantaſma diſtantia corpora ſejungat & intercedat? quomodo phantaſma occupari, repleri, diſcerpi, menſuram admittere, tótque poteſt aliis attributis ſubjacere, quæ non veretur ipſe poſt traditam iſtam imaginariam ſpatii definitionem ſpatio aſſignare? Quid ſi nullus homo, nullus in univerſo phantaſtes exiſteret, ideóne nuſquam aliæ res eſſent? aut neceſſario quieſcerent omnia (ſed nec quieſcerent cùm quietis etiam definitionem ſpatii phantaſma ſubingrediatur)? Ideò, inquam, nullum ſpatium, nullus locus, nullus motus exiſtere poſſint? Quàm abſona ſunt hæc, quàm παράλογα, nedum παράδοξα? Obiter hæc (pauca de multis) ut oſtendam quàm δυσκατάληπτα, quámque δυσερμήνευτα ſunt iſta communia magnitudinis ſymptomata,

ptomata, quum ea quàm accuratissimè studentes enucleare, viri præ multis ingeniosi tot se labyrinthis, difficultatibus, incommodis innectant. Quo magis condonandum sit mihi, si dilutiùs fortassis & crassiùs, ad communem sensum, quàm ad Metaphysicos captus accommodatiùs, quousque tantùm conducere putem proposito negotio, hoc est, quatenus Mathematicis inservia[nt] hypothesibus, τῇ ὑποθέσει δουλεύων, de iis disputiciam, ea recenseam & exponam. Ad rem: E magnitudinis præcipuis & communioribus affectionibus prima se nobis offert (nam ad nullum me ordinem astringo, cùm nullum sit, ut in ultima præmonui, ex parte rei fundamentum ordinis inter ejusdem rei proprietates reciprocas ac essentiales) prima, dico, magnitudinem ὡς ἔπος contemplantibus, se
I. sensui nostro, & cogitationi subjicit Terminatio. Nullam certe rem sensu attingimus, nisi ceu terminatam; nullius corporis interiora viscera penetramus, sed externam tantùm curem oculo perlustramus, manu contrectamus. Nec cogitatione (saltem distincta) quamvis magnitudinem complectimur, nisi ut limitibus quibusdam concluſam & comprehensam. Confusè quidem imaginari possumus magnitudinem aliquam, puta lineam rectam [in] tentum, sicuti dixit Aristoteles, infinitam, hoc est, eam produci vel augeri quousque libet, vel citra intervallum majus quovis intervallo designato, quam proinde denominamus infinitam, nec imprprie siquidem admittatur Philosophi,
Phys. III. 5. subtilissima profectò, definitio infiniti, Ἄπειρον τοῦτ' ἔστιν, ᾧ κατὰ τὸ ποσὸν λαμβάνοντι ἀεί

τι

πλαβεῖν ἔξω ἐστὶν· *(Infinitum eſt, cujus ſiquis aliquam quantitatem accipiat, aliquid extra (vel præterea) ſumi poteſt).* Verùm hoc nihil eſt aliud quàm plures ſucceſſivè lineas, idque juxta potentiam quandam indeterminatam & arbitrariam, non unam actu lineam interminatam diſtinctè conſiderare; talem animo comprehendere non poſſumus, nam iterum rectè Philoſophus, τὸ ἄπειρον ᾗ ἄπειρον ἄγνωστον, *Infinitum quà tale concipi cognoſcíque nequit.* (Eadem res eſt de infinito καθ' ἀφαίρεσιν, per ſubductionem aut ſubdiviſionem infinitam; quo nil intelligitur aliud quàm ſubtractionem ſeu diviſionem ad libitum poſſe continuari, nec ad impoſſibilitatem ultra progrediendi redigi negotium. De utroque infinito). Rurſum optimè Ariſtoteles de Mathematicis loquens, οὐδὲ νῦν δεῖ τὸ ἄπειρον, οὐδὲ χρῶνται, ἀλλὰ μόνον ὅσου ἂν βούλονται πέρας λαμβάνειν· *Infinitâ magnitudine Mathematici nec egent nec utuntur, ſed quantam lubet accipiunt ubi placuerit terminatam.* Revera dum lineam concipimus, idæam formamus alicujus exiliſſimi quaſi fili inter duos extremos apices protenſi (ſaltem ab uno ad ſeipſum recurrentis, ut fit in lineis curvis figuram aliquam ambientibus). Dum ſuperficiem cogitamus, corporis alicujus tenuiſſimam quaſi cuticulam, aut laminam anguſtiſſimâ margine circumſeptam imaginamur; dum corporis effigiem phantaſiæ penecillo depingimus, molem plerunque quandam opacam ſtrictiſſimo rariſſimóque velo undiquaque obductam nobis repræſentamus. Dum angulum concipimus, ſpatium aliquod indeterminatum duabus aut pluribus lineis, vel ſuper-

Phyſ. I. 5. II. 10

Phyſ. III. 11

ficiebus incluſum, vel aliquid tale concipimus. Nec ſecus de quantis analogicis; dum pondus ſcilicet cogitamus, aliquam cogitamus potentiam magnitudini cuipiam terminatæ (libræ videlicet uni, vel pluribus) elevandis parem; dum motum, corporis alicujus ab hoc ad illum terminum tranſitionem ſucceſſivam; dum numerum, unitatis repetitionem aliquà incipientem, aliquà deſinentem; vel multitudinem duabus unitatibus extremis, incluſivè ſumptis, definitam (ex vulgi ferè loquor ſententia, nam revera unitates non ſunt termini numerorum, etſi terminos ipſi ſuos habent, eoſdem nempe quos magnitudines quas repræſentant). Omnis igitur à nobis diſtinctà ratione conceptibilis quantitas eſt aliquo modo terminata, quatenúſque talis (hoc eſt illa ipſa quantitatis affectio) conducit haud parum Mathematicis hypotheſibus. Nam ex ea potiſſimùm magnitudinis præcipuas ſpecies ſeu dimenſiones varias deducimus; & quòd non temerè confingantur, at ſuo modo revera exiſtant, quodammodo demonſtramus. Sic enim licet argumentari: Corpus vel ſolida magnitudo (quam nemo ſcilicet non admittit, utpote palpabilem, & quæ propterea præſupponi poteſt) non ex ulla parte ad infinitum excurrit, & undiquaque terminatur: iſte terminus non eſt introverſum, aut quoad profunditatem diviſibilis (nam ſi diviſibilis eſſet, haud totus, ſed ejus duntaxat exterius aliquod foret terminus præter hypotheſin). Hinc datur ſolidæ magnitudinis terminus aliquis ſecundùm profunditatem indiviſibilis; is vocetur ſuperficies; ecce unam hypotheſin

potheſin Mathematicam, & ex ea reſultantem definitionem. Porro dicta ſuperficies non eſt uſquam interminata, ſed aliquo ambitu ſeu extremo clauditur; id extremum ſimili diſcurſu, quali priùs, versùs interiora, ſeu quoad latitudinem, eſt indiviſibile. Supponatur ergò dari ſuperficiei terminus quoad latitudinem indiviſibilis, qui dicatur linea; ecce alteram hypotheſin, eíque connatam definitionem. Itidem, iſta linea non eſt infinita, ſed introrſum, hoc eſt quoad longitudinem, ad utramque partem termino includitur; paríque ratione ſunt hi termini prorſus indiviſibiles; ergo ſupponatur dari lineæ terminus indiviſibilis, & hic appelletur punctum; quod omni modo indiviſibile eſt, participans quippe de ſuperficiei quoad profunditatem, & lineæ quoad latitudinem indiviſibilitate; nec non immediatè quoad longitudinem indiviſibile, quatenus lineæ terminus. Hinc tertia ſuppoſitio, conjunctam habens puncti definitionem. E quibus patet haud abſque fundamento ſupponi puncta, lineas, & ſuperficies à Mathematicis; nam licèt ut termini nil ferè videantur aliud præter ulterioris extenſionis negationes (negationes tamen in re fundatas, ut vidimus, & ab intellectu bene perceptas; ſicut umbras & tenebras in Phyſicis, improbitatem & inſcitiam in Ethicis) tamen alio modo conſideratæ admodum realia ac poſitiva ſortiri videntur attributa. Superficiei v.g. duobus modis dividi, adaugeri, imminui, menſuram ſubire, congruere, adæquari, excedere, deficere, nec non quomodocunq; moveri, & quieſcere convenit atque tribuitur. Imò

Imò verò, ſicut innueram, ſolæ ſuperficies immediatè ſenſibus objectantur, coloribus ſubjacent, lucis radios, ſoníque fluctus refringunt, aut repercutiunt; hæ primos motuum impetus excipiunt; hiſce ſolis ſeſe corpora mutuò contingunt, quippe quæ nullâ parte ſui ſe permeant aut penetrant. Eadem ferme vel ſupparia lineis attributa coaptantur; his rerum diſtantiæ cenſentur; ſecundùm has lucis radii diriguntur, gravia deſcenſum affectant, motus omnis tendit; his lucis & umbræ confinia dirimuntur; circa has quieſcentes corpora revolvuntur; produci denique, contrahi, ſecari, menſurari, quomodocunque comparari poſſunt. Nec ipſis punctis, utut ὑπόστασιν ἀμυδρὰν, ſubobſcuram & prætenuem habentibus entitatem, ſua deeſſe videtur attributorum qualiſcunque realitas. Nam & motum hæc & quietem obtinent; motum quidem unà cum corporibus quibus inſunt, quietem verò ſubinde peculiarem ſibi; ſicut rotæ centrum, poli telluris aut cœli (etenim ejuſmodi gyrationes circa quieſcens aliquid peraguntur, & ſecundùm aliquid ſui locum ſervant immutabilem) etiam circa punctum gravitatis nempe centrum, corporum momenta conſiſtunt, in eo quaſi nodo vires ſuas colligunt & coadunant, eo quodammodo fulciuntur & ſuſtentantur, ſecundùm id motûs ſui ſortiuntur directionem; versùs unum denique punctum in tellure medium, ceu conſpirantibus votis, propendent & ſponte ruunt omnia, vel directo certe greſſu ab eo refugiunt atque recedunt. Sed audiamus Proclum tale puncto elogium pangentem: Τάτε γὰρ κέντρα κατ' ἐνέργειαν

Proclus.

ὑφέστηκε

ὑφέστηκε συνεκτικὰ τῶν σφαιρῶν ὑπάρχοντα, καὶ ἐνίζοντα τὰς διαστάσεις αὐτῶν, καὶ σφίγγοντα τὰς δυνάμεις ἐν αὐταῖς, καὶ συνερείδοντα πρὸς ἑαυτὰ· καὶ οἱ ἄξονες συνελίσσουσιν αὐτὰς, καὶ περιάγουσιν αὐτοὶ μονίμως ἱδρυμένοι, καὶ περὶ ἑαυτοὺς ἀνακυκλοῦσι· καὶ μὴν καὶ οἱ πόλοι τῶν σφαιρῶν, καὶ αὐτοὺς τοὺς ἄξονας ἀφορίζοντες, καὶ τὰς ἄλλας περιφορὰς ἀφ' ἑαυτῶν συνέχοντες πῶς οὐχὶ δηλοῦσιν ἐναργῶς, ὅτι τὰ σημεῖα δημιουργικὰς ἔχει καὶ συνεκτικὰς δυάμεις, καὶ τελειοτικὰς τῶν διεστώτων τάντων, ἑνώσεως τε χορηγοὺς, καὶ ἀναπαύστου κινήσεως· ὅθεν ὁ πλάτων ἀδαμαντίνην αὐτῶν τὴν ὑπόστασιν εἶναι φησὶ, τὸ ἄτρεπτον, καὶ διαιωνίζον, καὶ μόνιμον, καὶ ὡσαύτως ἔχον τῆς οὐσίας αὐτῶν ἐνδεικνύμενος, τόντε ἄτρακτον ὅλον περὶ αὐτὰ κινεῖσθαι φησὶ, καὶ περιχορεύειν αὐτῶν τὴν ἕνωσιν. Hæc magnificè Proclus, etsi speciosiùs & populariùs (opinor) quàm veriùs & accuratiùs. Nihilominus enim cum illo de indivisibilibus istis serio pronuntiante (καθ' ἐνέργειαν ἵδρυτο, καὶ ὑπάρξιν ἔχει, καὶ δύναμιν αὐτοτελῆ, καὶ διήκουσαν διὰ πάντων τῶν μεριστῶν) juxta non sentio. Non existimo superficies, lineas aut puncta separatam quandam existentiam, aut propriam ex seipsis efficaciam possidere, vel aliter à solida magnitudine quàm κατ' ἐπίνοιαν distingui; sed unicam potiùs arbitror ex parte rei magnitudinem dari, quæ prout in varias partes extendi, diversimodè partiri, differentes spissitudinis, latitudinis, & longitudinis considerationes induere vel subire potest, causam vel occasionem suppeditat idoneam rationi nostræ distinctionem istam, magnitudinis in tres quasi species huic scientiæ perquam utilem & accommodatam comminiscendi.

miniſcendi. Sed de terminatione magnitudinis hæc dicta ſufficiant: de figuratione enim ſpeciali ſuccurret opportunior alius
II. dicendi locus. Ei ſuccenturiat Extenſio; quâ nempe ſignificatur magnitudinis terminos non immediatè conjungi vel coëxiſtere, ſed iis aliquid intercedere vel interponi. Id enim exigit ratio termini vel extremi, quæ diverſi quiddam ſupponit intra terminos
Phyſ. Vl. 1. comprehenſum. (Οὐκ ἅμα τὰ ἔσχατα, ἃ γὰρ ἐστιν ἔσχατον ἀδὲν τῶ μερῶς, ἕτερον γὰρ τὸ ἔσχατον, ἢ ἔσχατον· *Extrema ſimul conſiſtere nequeunt, nec enim aliquod ejus quod partibus caret extremum eſt; aliud enim extremum eſt ab eo, quod extremum habet*, inquit Philoſophus:
περὶ τὸ μων γραμμῶν. & alibi, τὸ πέρας ἄλλο καὶ ἢ πέρας) nec ſanè concipere poſſumus ullam magnitudinem niſi velut extenſam, & terminos habentem aliquo diſtitos intervallo; non lineam niſi ceu ſemitam inter extrema duo loca porrectam; non ſuperficiem, niſi ceu pavimentum intra limbos ſuos conſtratum; non corpus aliter quàm ut (vaſculum aut) cameram ſuos intra parietes aliquid complectentem. Tales enim nobis experientia ſimilitudines ac idæas ſuggerit magnitudinum. Nec ſecus ipſis κατ' ἀναλογίαν quantis etiam ſuo modo convenit extenſio qualiſcunque. Nam inter vim unius libræ attollendæ parem, & illam quæ decem libras poteſt elevare, media jacet potentia duas, tres, &c. libras evehere valens; unde pondus ſuo modo extenditur. Et inter anni, menſis, diei, horæ, τὸ νῦν primum ac ultimum duratio quædam intercedit, juxta quam tempus extenditur. Ac inter motûs initium & finem medium quiddam decurſo

ſpatio

ſpatio reſpondens jacet. Numeri verò eadem eſt, quæ magnitudinis, quam denominat & repræſentat, extenſio ; binariis ſcilicet quo linea bipalmaris exprimitur, duorum ad palmorum longitudinem extenditur ; binarius quo bijugerus ager effertur, ad duorum jugerum latitudinem exporrigitur. Cùm igitur ex conceptibus noſtris ab experientia deſumptis ſatis apparet, omnem magnitudinem & quantitatem aliquatenus omnem extendi, licebit Mathematicis hanc ſupponere, quáſque poſſunt ab ea ſuppoſita conſequentias elicere : valebúntque v.g. tales hypotheſes : inter deſignata puncta ſumatur media linea : inter expoſitas lineas jacet media ſuperficies : inter ſuperficies extremas concipiatur interjecti corporis aliquid : inter duo inſtantia medii temporis quiddam intelligatur : inter duo momenta ponatur aliquid intercepti ponderis : inter duos terminos aliquid porrigatur intercurrentis motûs. Et ejuſmodi quævis adſumantur haud illicitæ ſuppoſitiones. Sed de Extenſione hactenus. Illam conſequitur altera III.
magnitudinis affectio, Compoſitio ; hoc eſt, quod magnitudo continet in ſe diverſa, vel conſtat ex alio ac alio. Namquoniam extenditur, & diſtant ejus extrema, non eſt tota ſimul ; unde deſignari poteſt aliud atque aliud in ipſa ; adeóque componitur ex alio ac alio, hoc eſt ex partibus ; nam magnitudo quatenus componitur è diverſis in ea contentis dicitur totum, iſta verò diverſa partes appellantur. Pari modo cùm ſingula dictarum partium non ſit tota ſimul, (nam ſi tota ſimul foret, cum totius magnitudinis extremo.

mo, vel cum adjacentis sibi partis extremo coincideret, adeóque non esset medium quid, nec aliud, nec pars) ergo itidem designari potest in ea aliud atque aliud, adeóque componitur ipsa ex aliis partibus, & hæ pariter ex aliis, ac ita ad infinitum, hoc est quousque libuerit eam è partibus minutioribus compositam imaginari. Unde consectatur magnitudinem quamvis ex homogeneis sibi magnitudinibus conflari atque constitui, lineam è lineis, superficiem è superficiebus, corpus è corporibus; non verò lineam è punctis, aut superficiem è lineis, aut corpus è superficiebus. Nam puncta, dicis causâ, respectu lineæ præterquam quòd nil aliud sint, ut supradictum, quàm negationes ulterioris extensionis, & vix aliquid obtineant positivi; & præterea ceu termini connotent aliquid interjectum, sicut sibi nequeant immediatè cohærere, totúmque quicquid est lineæ situm cogitetur inter ipsa; sunt etiam indivisibilia, ac idcirco si duo supponantur adposita sibi, toto sui contingent se mutuò, hoc est coincident & coëxistent, nec adeò quid habens extrema vel extensum constituent. (Ita ratiocinatur Philosophus; Ὁπότε γὰρ ἥπλουν ἐν ἑνὶ μεγέθει καὶ ἓν ἑνὶ μέγεθος, καὶ πάλιν ὁμοῦ ἅμα οὐδὲν ἐποίουν μεῖζον τὸ πᾶν· διαιρεθέντος δὲ εἰς δύο καὶ πλείω, οὐδὲν ἔλαττον οὐδὲ μεῖζον τὸ πᾶν τοῦ πρότερον· ὥστε κἂν πᾶσαι συντεθῶσιν, οὐδὲν ποιήσουσι μέγεθος· de Atomis loquitur) eadem est ratio lineæ respectu superficiei, & hujus respectu corporis. Quin & eodem modo tempus ex temporibus, non ex instantibus; motus ex motibus, non ex tendentiis indivisibilibus; velo-

De Gen. & Corrupt. l. 2.

citas.

locitas ex velocitatibus, & pondus ex ponderibus, neutrum ex gradibus vel impetibus abſolutè minimis; numerus ex unitatibus, illæ ex fractis partibus, non ex cyphris, conſtant & integrantur. Ex his etiam liqueat ubivis in linea ſumi poſſe punctum, ubivis in ſuperficie lineam & punctum, ubivis in corpore ſuperficiem, lineam, & punctum, pro arbitrio. Nam quia partium corporis infinitarum (vel indefinitarum, hoc eſt plurium quavis multitudine determinatâ) aliqua deſinit ubivis aut incipit, ubivis habetur ejus terminus ſuperficies, in hac partem aliquam terminans linea, in ea partem aliquam terminans punctum. Nec ab his abludit conceptus noſter & ſenſus communis (ad hunc enim ſæpiùs appellandum eſt, quoniam is teſtis eſt & index experientiæ, in experientia verò fundantur hypotheſes, ut toties inculcatum) nam nullam omnino magnitudinem concipimus niſi ceu compoſitam ex partibus, nec has partes niſi quadantenus extenſas, adeóque conflatas ex partibus. Penitus incompoſitum, poſitivè in materiatis, ſicut omnem ſenſum, ita prorſus omnem fugit imaginationem. Igitur compoſitionem hanc, & quicquid eam immediatè conſequitur ſupponere licet Mathematicis, quales ſunt quas ſubſequentis, huic arctiſſimè connexæ, proprietatis declarationi ſubjungam, ſuppoſitiones, nè cogar eadem repetere. Nam Compoſitionem excipit ejus individuæ comes & conjux Diviſibilitas. IV. Quoniam enim, ut modò oſtenſum, magnitudo componitur ex partibus revera diſtinctis, hæ poſſunt ſeparatim exiſtere, poſſunt ſaltem

seorsim considerari, hoc est re vel mente dividi, seu in partes resolvi. Quare quanti
Met. IV. 13 definitionem hinc extruit Philosophus? Τὸ διαιρετὸν εἰς ὑ πάρχοντα, ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἕν τι, καὶ τοδέ τι πέφυκεν εἶναι. *Quod dividi potest in ea quæ insunt, quorum utrumque (nempe si tantùm duæ sunt partes) vel unumquodque unum quid, idque determinatè aptum natum est esse.* Adeò scilicet intima est quantitati divisibilitas, ut ex ipsa videatur commodè definiri. Quod sanè communibus hominum conceptibus apprimè congruit. Nam indivisibile quantum verbo tenus asserat non nemo, sed nullus, opinor, ejus imaginem animo depingat: cum divisibilitate mentem effugit extensio, cum partibus totum evanescit. Τί
De Gen. & Corrupt. l. 2. ὸ ἔστιν ὅπερ τὴν διαίρεσιν διαφεύγει; meritò scisitatur Philosophus (*Quid illud est quod divisionem respuit?* Planè nihil.) De tota magnitudine valet hoc; de partibus etiam quibuscunque pari ratione valet; sicut omnes conflantur ex partibus, ita possunt omnes in partes alias ac alias resolvi: nullum datur in quacunque specie magnitudinis absolutè minimum. Quicquid dividitur in
Phys. VI. 1. partes dividitur iterum divisibiles (Λέγω δ' συνεχὲς, τὸ διαιρετὸν εἰς αἰεὶ διαιρετά, Arist.) Non ignoro, siquidem nemo ignorat, doctrinam hanc à nonnullis gravatim admitti, ab aliis planè rejici, magnâque passim pertinaciâ de perpetua quantitatis divisibilitate, déque compositione magnitudinis (an ex indivisibilibus, an ex partibus homogeneis) controversiam agitari; scio multis involutam difficultatibus, multis obnoxiam contradictoriis argutiis, ob intervenientem præ-

sertim

sertim infiniti nobis haud perfectè comprehensibilem conceptum. Tot illas tricas evolvere, tot salebras explanare, tritam ac eò vexatamque, prolixam atque perplexam, quæstionem aggredi non est mihi nunc animus; integrum volumen accuratè pertractata compleret; nimiam curam exposceret & longiorem moram, quàm ex usu foret ei jam impendere. Sufficiat quòd perpetua divisibilitas, & compositio quantitatis ex partibus homogeneis communibus, ut innuimus, hominum idæis bene respondeat; quòd ipsam præstantissimi plerique Philosophi posuerint & propugnârint: (Plato imprimis, si fides Aristoteli; Πλάτων ἄπειρα δύο ἐποίησεν, ὅπερ καὶ ἐπὶ τῶν ἀνίσων δοκεῖ συμβαίνειν, καὶ εἰς ἄπειρον ἴσον, καὶ ἐπὶ τῶν καθαίρεσιν. *Phys. III. 8.* Aristoteles ipse multis in locis, Phys. Ausc. VI. 1. de Gen. & Corrupt. I. 2. & peculiari libello perquàm erudito, περὶ ἀτόμων γραμμῶν, non tantùm asserit, sed valide probat; tota schola Stoicorum, & in iis acutissimus Chrysippus, ei suffragati dicuntur. Recentium quoque Philosophorum subtilissimus Cartesius calculum suum adponit, & nedùm divisibilem esse materiam in partes infinitas, sed actu dividi, argumento Physico, ex peractis continuis per circulorum excentricorum inæqualia interstitia motibus deprompto, penè demonstrat. Accedit omnium Mathematicorum necessarius consensus; quamvis enim vix hoc usquam apertè supponunt, sæpe tamen tectè sumunt, & nisi verum sit, ipsorum corruunt pleræque demonstrationes. Sumunt, inquam, ut in definitione rectæ lineæ, seu dicatur ex æquo suis interjecta punctis,

seu definiatur brevissima linearum, quæ duci possunt ab uno puncto ad aliud. Nam quo modo linea duobus punctis constans, inter sua puncta jacet omnino? Et si sumatur circuli semidiameter constans, ex adversantium mente, tribus tantùm punctis, erit illa æqualis lateri hexagoni isti circulo inscripti, sextans vero circularis circumferentiæ non attinget quatuor puncta (aliàs enim tota circumferentia punctis 24 constaret, adeóque quadrupla foret diametri, contra manifestissimas Archimedis demonstrationes, & communem sensum quo circumferentia circuli perimetro circumscripti quadrati minor dignoscitur) atqui si sextans peripheriæ non attingat quatuor puncta, neutiquam (juxta indivisibilia propugnantium hypothesin) excedet tria; non erit igitur subtensâ suâ major; nec proinde recta linea brevior erit omnibus, quæ inter eadem puncta duci possunt lineis. Similis consequetur difficultas, semidiameter circuli 5 punctis constare supponatur; nam peripheria 60 graduum non attinget 6 puncta (aliàs integra peripheria contineret 36 puncta, hoc est, diametri tripium & semissem excederet, quod itidem communi sensui facilè demonstretur refragari). Quæ certè sola consideratio sufficiat evertendæ contrariæ sententiæ, saltem ejus cum Mathematicis principiis manifestè declarat repugnantiam. Item cùm à puncto quovis ad quodvis punctum supponitur duci recta linea, quomodo consistat id cum indistantia, vel immediata punctorum cohærentia? Quinetiam quòd assumitur duas rectas lineas à concursu statim divaricari, seu di-

discedere à se invicem, nec præterquam uno se puncto secare, nec habere communem aliquam partem, extra punctum intersectionis, hisque cognata, ab indivisibilium positione manifestè destruuntur; ponatur enim circuli circumferentia constare quotlibet punctis, ad quæ singula ducantur è centro radii, liquet evidentissimè plurium circulorum concentricorum peripherias, aut totidem è punctis quot ille prior conflari, adeóque ipsam adæquare, quod absurdissimum, aut istos radios alibi quàm in centro se contingere, sibimet occurrere, vel intersecare se mutuò. Et quod ad conclusiones attinet Geometricas, quomodo bisecari potest recta linea constans punctis imparibus? quomodo linea quævis possit in tot partes æquales secari in quot alia quælibet secta supponitur? quomodo si trianguli crura sint utlibet inæqualia, per majoris quotlibet puncta duci possint ad basim parallelæ, quæ minoris crus pertranseuntes non coincidant, intersecent, aut contingant seipsas, contra parallelarum naturam & definitionem? Et si crura basi longè majora sint, quomodo parallelæ crescant uniformiter, seu proportionem cum interceptis ad verticem crurum partibus conservent eandem, ut basim multo non excedant, quæ tamen minores sunt, etiam ipso sensu judicante? quomodo in eadem recta indefinitè producta sumptis centris quotlibet, puta millies millenis aut utlibet pluribus, per terminum dictæ rectæ descripti circuli se in uno tantùm puncto contingant, juxta manifestissimum Geometriæ præceptum, ut non clarissimè consequatur indè, rectam quantumvis minimam contactui vici-

nam circulorum istorum circumferentias secantem punctis secari indefinitè multis; adeoque potentiâ infinitis vel innumeris? quomodo, secundùm adversarios, inter duas rectas unam puta 7, alteram 9, punctis constantem reperiri possit media proportionalis, vel ad easdem 7 & 9 tertia proportionalis exhibeatur? Nequicquam adinveniendæ mediæ super conjunctas illas tanquam diametrum constituatur semicirculus, & à segmentorum communi termino erigatur perpendicularis; nec enim illa poterit esse proportione media inter dictas rectas, cùm juxta positionem adversam nulla talis dari possit. Quomodo non tollatur funditùs omnis magnitudinum ἀσυμμετρία, quam tot exemplis ostendunt, tot demonstrationibus muniunt Geometriæ? Cùm communis omnium magnitudinum mensura punctum existat, habeátque se magnitudo quævis ad aliam, sicut numerus punctorum ad numerum punctorum, si lineæ constent è punctis, & superficies è lineis, & è superficiebus corpora. Quomodo non pessum ibit universa de lineis asymptotis, mirabilis equidem, sed nullâ Geometriæ parte minùs certa vel clara doctrina; quæ magnitudinis infinitam divisibilitatem aut invictè confirmat, aut unà concidit, utpotè quâ minima quæpiam linea continuo ad infinitum decremento non exhauriri, neque continuo ad infinitum incremento datam, paulo majorem, adæquare lineam, perspicuè demonstratur? Quomodo denique non omnis auferatur motuum quoad velocitatem differentia? Nempe si mobile punctum uno tempore quinque percurrat puncta, quomodo possit alterum eodem tempore conficere sub-

ſubduplum, ſubtriplum, aut ſubquadruplum, ejuſce ſpatii, quum totum in iſtas partes dividi nequeat? Infinita poſſem excogitare, & adferre talia, quibus oſtendatur ab iſta compoſitionis ex indiviſibilibus aſſertione totam concuti, proſterni, penitus ſubverti Geometriam; nil in ea ſani vel ſolidi relinqui, ſed immanem & deplorandam ruinam, confuſionem, ἀυσασίαν in diviniſſimam iſtam induci ſcientiam*; cujus tamen effata, præter evidentiam principiorum & diſcurſuum rigorem, ita cùm admiranda (qualis falſis ſeu principiis ſeu ratiociniis obvenire nequit) inter ſe conſonantiâ, tum perpetuo exquiſito cum experientiâ conſenſu firmè ſtabiliuntur, ut mundi citiùs cardines emoveantur loco, rerúmque machina collabatur, quàm Geometriæ fundamenta (τὰ θεῖα τῆς γεωμετρίης ἀξιώματα) labefactentur, aut ejus concluſiones falſitatis arguantur. Sed dimittenda nobis eſt hæc quæſtio, poſtquam admonuero breviter, præcipua quæ contra perpetuam quantitatis diviſibilitatem adferuntur argumenta, vel petitione principii laborare, vel falſis ſuppoſitionibus inniti, vel parum ad rem pertinere. Objecit Epicurus, in ſuarum atomorum gratiam & patrocinium, ſi partes magnitudinis infinitæ ſint, magnitudinem ex iis conflatam intelligi non poſſit finitam. Quid hoc eſt aliud quàm petere τὸ ἐν ἀρχῇ, vel idem per idem aſtruere? Hoc enim ipſum quæritur, an finita magnitudo (nam de infinita non agitur)

* Οὕτω γὰρ λάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστα κινήσειε τῶν Μαθημάτων. *Ariſt. de Cælo l.* 5.

Τῷ μὲν γὰρ ἀληθεῖ πάντα συνάδει, τῷ δὲ ψευδεῖ ταχὺ διαφωνεῖ τὰ ἀληθῆς. *Ariſt. Eth. l.* 8.

agitur) possit habere partes infinitas. Id verò dicit adversarius non potest esse, nequit intelligi. Magis appositè rogâsset explicationem modi quo fiat, quàm ita fieri non posse concluſisset. Cui quæstioni responderem, quòd rationi quidem adversatur, ut magnitudo finita partes habeat aliquotas (centesimas puta vel millesimas) infinitas, imò repugnat ut habeat harum plures quàm centum vel mille; sed quòd partes habeat plures millesimis millies acceptis, vel plures partibus alio quovis numero denominatis, non equidem video quomodo repugnet, imò potiùs perspicio quòd rationi consentiat optimè. Certè quòd sicut integri numeri possint ad infinitum augeri κατ' πρόθεσιν, ita fracti possint ἀνθυφόρως diminui τῇ καθαιρέσει (quod nempe sicut concipitur aliquis ultra millenarium numerus, eodem modo concipiatur aliqua pars infra millesimam) signum est magnitudinis, quibus respondent, utroque pariter modo versus infinitum vergere. Quinimo quòd infinita series fractionum certâ qualibet proportione decrescentium æquetur certo numero, vel unitati, vel unitatis parti, (v.g. quòd talis series decrescentium proportione subsesquialtera æquetur binario, decrescentium ratione subduplâ æquetur unitati, decrescentium ratione subtriplâ æquetur semissi unitatis) satis clarè docetur & ostenditur ab Arithmeticis, unde non repugnat finitum aliquod infinitas in se partes continere: præsertim cùm numero nihil conveniat, quod non potiori jure convenit magnitudini, quam numerus repræsentat ac denominat. Et sanè ferè tollit om-

omnem difficultatem imaginandi quo pacto poſſit evenire, quòd res finita conflari poſſit ex partibus infinitis, ſi modo conſideretur, prout adcreſcit multitudo partium, ita pari paſſu reciprocè ipſarum magnitudinem decreſcere. Ut ſi tres partes habeat illarum ſingula non eſt niſi tertia pars totius, ſi quatuor non niſi quarta; ſic ut ipſarum parvitas multitudinem compenſet. Sed urget Epicurus, vel ejus nomine Lucretius:

Præterea niſi erit minimum, parviſſima quæque
Corpora conſtabunt ex partibus infinitis.

[Rectè, quid inde?

Ergo rerum inter ſe ſummam minimámque
quid eſcit?

Nempe futurum putat, admiſsâ noſtrâ hypotheſi, ut minimum quantum adæquet maximum, ut granum papaveris æquiparetur toti mundo, nec muſca amplitudine cedat elephanto; quia pariter iſta cum his partes continent infinitas. Sed hæc argumentatio nil efficit: quid enim obſtat quo minùs exigua res tot habeat partes minores, quot amplior alia majores obtinet; ut ſolidus in tot denarios, quot in uncias libra diſtribuatur; ut tot octantes pes, quot ipſum miliare ſtadios complectatur? Quidni ſicut univerſus terrarum orbis ad arenam, ſic arena ſe habeat ad aliam arenulam, ut quoties ille continet iſtam, toties iſta comprehendat hanc? Cùm mundus ipſe reſpectu alterius mundi, quem Deus condere poteſt, major non ſit quàm hic ipſe reſpectu minutiſſimi pulviſculi vel arenulæ. Igitur conſtare poteſt utrumque (quod majus & quod minus eſt) ex partibus infinitis, ſed illud ex majoribus, hoc ex

minoribus, tantâ scilicet proportione minoribus, quantâ totum hoc illo toto minus est. Sed instant porro, saltem ex assertione nostra sequi, quòd infinitum infinito sit inæquale: numerus quippe partium in linea bipedali duplus erit infiniti numeri partium existentis in linea pedali; siquidem numerus ille quisquis est hunc evidentissimè bis includit. Absurdum autem videtur infinitum excedi, contineri, multiplicari. Respondeo etiam, in hoc adversariorum argumento palmario principium repeti; hoc est, idem ex eodem aliis verbis prolato deduci. Numerus enim infinitus nil innuit aliud, quàm id cui tribuitur posse dividi, vel concipi divisum in infinitum; id quod nos asserimus utrique lineæ tam pedali quàm bipedali convenire, non obstante quòd illa sit hujus dupla; negant hoc ὅτι ἐξ ἀναλύσεως sub aliis verbis, at nihil in contrarium subdunt novi argumenti. Certè numerus (sicut multoties inculcatum, & mihi persuasissimum est) numerus, inquam, seu finitus seu infinitus, nullam ex se vel æqualitatem vel inæqualitatem habet alterius numeri respectu, nisi quatenus uterque generis ejusdem magnitudinem designat & repræsentat; quare dicere numerum hunc infinitum majorem esse illo numero infinito, & hoc absurdum pronunciare, nil est aliud quàm dicere magnitudinem hanc, quæ concipitur ad infinitum divisa majorem esse illâ, quæ concipitur etiam ad infinitum divisa, & hinc absurdum consequi, hoc est, nostram thesin negare, sed illam aliquâ novâ machinâ non oppugnare. Præterea, quòd nullatenus absurdum videatur

tur infinitum infinito contineri (infinitam dico magnitudinem infinitâ magnitudine, vel infinitum numerum infinito numero comprehendi: nam ſi ponatur, in ſpatio quod nemo ferè non imaginatur immenſo, protendi infinita linea recta; in illa proculdubio continebuntur infiniti numero pedes, & infinitæ orgyæ, & infiniti ſtadii: item illa infinita recta ſæpius continebitur in infinita ſuperficie, & hæc innumeris vicibus in infinito ſolido corpore. Nec abſimiliter in æterna duratione facilè concipiantur infiniti anni, infinitiores dies, híſque pluries infinitæ horæ, & infinitiſſima momenta. Dices poſitiones iſtas impoſſibiles eſſe, & ἐνὸς ἀτόπου δοθέντος τἄλλα συμβαίνειν. Reſpondeo, cùm adverſariis ex infiniti natura ſtruat argumentum, licet ipſum ſupponere; & quanquam ipſius rei poſitio fortè ſit impoſſibilis, conſecutio tamen perceptibilis eſt & manifeſta, nempe quòd neutiquam (ut volunt illi) infiniti naturæ repugnat in altero infinito contineri: uti licet impoſſibile ſit hircocervum exiſtere, ſatis evidens eſt hircocervi notioni non adverſari quòd pedes habeat aut cornua. Saltem valuerit hoc ad homines, Epicureos intelligo propugnatores atomorum, qui ſuum κενὸν magnitudine ſtatuebant immenſum, ſuas atomos infinitas multitudine. Εἶναι αὐτὸ τὸ κενὸν ἄπειρον, καὶ τὰ σώματα ἄπειρα, ſtatutum ab Epicuro refert Plutarchus in placitis) & atteſtatur Lucretius:

——*patet ingens copia rebus*
Finibus exemptis in cunctas undique partes.

Quo

Quo posito clarissimè liquet infinitum numerum infinito numero, spatium infinitum infinito spatio, vel de facto comprehendi. Nam in infinito numero atomorum continentur infiniti numeri octonarii, magis infiniti quaternarii, infinitiores binarii, & unitates infinities infinitæ. Paritérque de spatiis. Objecit denique Zeno contra nostram sententiam, infinitis partibus constans spatium non posse successivè pertransiri, adeóque per eam motum è rerum natura tolli. Tribus verbis repono, rectè sequuturum hoc, si mobile supponatur infinitè tardum; at si velocitatem habeat aliquantam, illa cuidam spatii determinatæ parti respondebit, quàm adeò designato tempore mobile poterit emetiri. Moneo quæ contra compositionem ex indivisibilibus dicta sunt, illos pleraque spectare, qui magnitudinem constitui volunt ex indivisibilibus numero finitis; quæ sententia Geometricis decretis magis adversatur. Cum quibus fortasse conciliari potest, nec aliàs quàm loquendi modo differt opinio Galilæi, & aliorum ei συμψήφων, ex infinitis ipsam atomis compositam censentium. Sed istam sententiam missam facio; (etenim si quæ mihi cogitanti obveniant omnia minutatim excuterem, in immensum redundaret sermocinatio nostra. Complura vobis ut maturiori judicio vestro corrigenda, sic & diligentiore curâ supplenda linquo). Cæterum ne tumultuaria hæc disputatio provehatur in infinitum, haud dissimulo nec diffiteor ab intellectu nostro difficilè capi, quomodo dividi possit unaquæque pars, sic ut actu divisæ omnes non ad indivisibilia,

vel

vel ad nihilum aut nihilo proximum aliquid redigantur; nec tamen ideo propter imperfectam conditionem humanæ mentis, & captûs noſtri tenuitatem, deſerendam eſſe ſentio tot manifeſtis indiciis compertam, tot argumentis firmiſſimis ſuffultam veritatem. Egregiè Ariſtoteles; Ἀλλ' ἄτοπον ἴσως τὸ μὴ δυναμένους λύειν τὸν λόγον ἀχλεύειν τῇ ἀσθενείᾳ, καὶ προσεξαπαλῶν ἑαυτοὺς μείζους ἀπάτας, βοηθοῦντας τῇ ἀδυναμίᾳ. περὶ οὐρ. κ. h. e. *Equidem rationi diſſentaneum eſt, quòd inſtantias omnes repellere nequeamus, infirmitati noſtræ ſervire vel ſuccumbere; majoréſque nos in errores conjicere, quòd minoribus anguſtiis nos expedire nequeamus.* Cui non abſimili prudentiâ ſuccinit Carteſius; Quamvis quomodo fiat indefinita iſta diviſio cogitatione comprehendere nequeamus, non ideo tamen debemus dubitare quin fiat, quia clarè percipimus illam neceſſariò ſequi, ex natura materiæ nobis evidentiſſimè cognitæ, percipimúſque etiam eam eſſe de genere eorum, quæ à mente noſtra, utpote finita, capi non poſſunt. Maneat igitur omne quantum componi è partibus compoſitis, & dividi poſſe in partes iterum diviſibiles, & proinde Mathematicis licere quaſlibet eis fundamentis hypotheſes ſuperſtruere. Tales nempe; A majori quavis magnitudine ſubduci poſſe æqualem cuilibet minori. Inter duas homogeneas magnitudines inæquales utcunque deſumi poſſe mediam aliquam ejuſdem generis. Ubivis in linea ſurſi poſſe punctum, in ſuperficie punctum & lineam, in corpore punctum, lineam, & ſuperficiem, pro lubitu. Quamlibet magnitudinem habere partes homogeneas numero quovis de-

Princip. II. 34.

denominabiles, decimas putà, centesimas, millesimas, &c. nec abhorrere à ratione, si speculandi gratiâ quomodocunque divisa supponatur. Et consimiles his; nec enim jam omnes hypotheses enumerare, sed ipsorum duntaxat fontes aperire propositum habeo. Superstant alia magnitudinis attributa, quæ nunc persequi tempus vetat.

LECT. II.

CUM instituti discursûs filum eò me pertraxerit, ut Mathematicarum hypothesium gratiâ, de magnitudinis affectionibus & symptomatis communioribus dispiciam, & de nonnullis quæ se primùm objecerant (terminatione nimirum, extensione, compositione, divisibilitate) pro rerum dignitate pauca, pro nostro proposito satis multa disseruerim, supereſt ut reliqua deinceps perstringam, occupationem spatii, positionem determinatam, mobilitatem, mensurabilitatem, proportionem, & siqua occurrerint alia, de quibus Mathematici depromunt, aut legitimè depromere possunt hypotheses ratiociniis suis accommodatas. Imprimis magnitudini solet attribui quòd occupet & repleat spatium. Quid verò sit hoc spatium difficile sit exponere. Nam an detur necne spatium aliquod ab ipsa rerum magnitudine distinctum, si vel ad conceptus vulgares attendamus, aut subtiliores Philosophorum excutiamus sententias, haud in proclivi sit

sta-

ſtatuere; adeò repugnantes ſententiæ cum ſpecioſis nituntur argumentis, tum gravibus urgeri videntur incommodis. Imprimis nullum à rebus quantis reverà diſtinctum exiſtere ſpatium iſta videntur arguere ſatis manifeſtè. Primò, quòd ſi ſit improductum & independens, æternúmque proinde & immenſum ſit oportet (nam præterquam quòd à ſpatii realis aſſertoribus tale plerumque concipitur & ſupponitur, ſi tale non ſit ceſſabit omnis ratio, propter quam dari ſupponatur, ut ejus conſtituendi cauſas expendenti liquebit) atqui dari quid eximiorum iſtorum divinæ naturæ attributorum particeps, à Deo quoque non creatum nec dependens, tam rectæ rationi diſcrepare, quàm à pietate videtur abhorrere. Tum ſi ſpatii quæcunque ſit idæam examinemus, nihil in ea præter extenſionem quandam, & capacitatem indefinitam deprehenſuri videmur; quæ cùm ipſius magnitudinis ſint proprietates, ſpatii nullum à magnitudine diſcrimen arguunt, cur enim re differant, quæ proprietatibus congruunt? Non Carteſii modò, ſed ipſius Ariſtotelis eſt hæc argumentatio: Ὡς εἰ τὸ τοπο (inquit Philoſophus) μηδὲν διαφέρει, τί δεῖ ποιεῖν τόπον τοῖς σώμασι παρὰ τὴν ἐκάστου ὄγκον; *Si magnitudo rerum a ſpatio nihil diverſum habet in ſe, quamobrem diſtinguitur à ſpatio ſuo rei cujuſpiam moles?* Porro, ſpatium ſi quod eſt à magnitudine differens, ſciſcitamur in qua rerum claſſe reponatur. Cùm enim res omnis aut ex ſe ſubſiſtat, aut accidat alteri, neutrum iſti ſpatio convenire videtur. Non ad ſubſtantiæ dignitatem ipſius patroni ſpatium evehent, nec res ipſa patietur, *Phyſ. Auſc. IV.* 12.

tur. Sed nec accidens est, quoniam omni substantiæ extrinsecum est, & cum ea non circumfertur, eâque sublatâ permanet; & ab alia nulla re pendet. Prætereo Zenonis istam argutiam; quòd res omnis sit alicubi, spatium ergò si sit aliquid ab aliis distinctum, alicubi existet; unde spatii spatium erit, & hujus secundi spatii spatium aliud, & sic infinitè; quod ludicrum est. (Ἐι πᾶν τὸ ὄν ἐν τόπῳ, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τόπου τόπος ἔσται, καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον πρόεισιν; ut est apud Philosophum in Physicis). Ejusmodi ratiociniis impugnatur spatii realis à magnitudine diversitas: at non minùs validis in speciem argumentis astruitur. Nam primò, communes hominum conceptus appellando, videtur omnibus aut innata vel alicunde conquisita notio spatii à rebus distincti. Τὰ ὄντα πάντες ἀπολαμβάνουσιν ἔν τινι, inquit Aristoteles: h.e. Omnes ubi rerum animo separant ab ipsarum Esse. Quinimo vulgus hominum imaginari consuevit ὑπεστρωμένον τι, commune quiddam cunctis rebus substratum, quod infinitè distendatur, & nullis circumscribatur limitibus, quod omnino penetrabile sit, & facillimè quidvis in se recipiat, nec ullius in se rei refugiat subingressum; quod mobilium successiones excipiat, & motuum velocitates determinet, & rerum distantias metiatur; quod immobiliter fixum sit, etiam quoad omnes sui partes nulli rei alligetur, nusquam alio transferatur; quod immensæ denique sit capacitatis vas & conceptaculum (ἀγγεῖον ἀπεριληπτον, ait Philosophus) universa complectens in se quæ sunt, & quæ possunt existere. Tale quid omnes ferè mor-

Phys. IV. 3.

Phys. IV. 1.

Phys. IV. 6.

mortales phantaſiis ſuis inſculptum habent. Et quod revera tale quid exiſtat, præter hunc imaginandi conſenſum, permulta videntur arguere. Quorum vis ut pateat, & aliquid efficiat, præſtruendæ ſunt aliquæ theſes aut aſſertiones, quibus ſuffulciuntur adducenda pro ſpatii realitate ratiocinia. Primò, materia non eſt infinitè extenſa, ſaltem quod propoſito noſtro ſufficit, haud neceſſariò talis eſt. Nam unde neceſſitatem iſtam habeat? an à ſe? Non pium hoc, cùm Deo cunctarum rerum originem toties diſertis verbis aſcribant ſacræ literæ; (Τὰ πάντα δι' αὐτοῦ καὶ εἰς αὐτὸν ἔκτισται· οὐ ἕκτισας τὰ πάντα, καὶ διὰ τὸ θέλημά σου εἰσὶ καὶ ἐκτίσθησαν· πάντα δι' αὐτοῦ ἐγένετο· ἡ χεὶρ μου ἐποίησε ταῦτα πάντα· id eſt, Quicquid uſpiam eſt rerum, exceptâ nullâ: innumera paſſim occurrunt talia). Nec ulla ratio ſuadet, ut à ſe potiùs infinitam, quàm infinitam habere credatur ſubſiſtentiam: an à Deo? Quis ei (agenti liberrimo & independenti) neceſſitatem impoſuit, ut infinitatem tribueret materiæ? Quo liquet indicio revera tribuiſſe? Num potuerit haud diſputo (quis enim divinæ potentiæ limites aſſignet?) At longè credibilius videtur, ut reliquis rebus vires & potentias præfinitas indidit, ita certos ipſum materiæ terminos ſtatuiſſe. Id quod etiam ſacroſancta ſcripta ſatis perſpicuè videntur atteſtari. Ecce (ſemel ac iterum dicit Rex ſapientiſſimus) non cœli, ne quidem cœli cœlorum capiunt te: hoc eſt, anguſtior eſt tota rerum univerſitas, quàm ut Deo coëxiſtat; extimos ille rerum fines tranſcendit; adeóque materia non eſt de facto ad infiniſ-

Eph. III. 9. Col. I. 16. Apo. IV. 11 Joh. I. 3. Iſa. LXVI. 1, &c. Act. VII. 50.

II Chron. II. 6. VI. 18.

tum

tùm protensa, nedum ut necessariò talis est.

Princ. II. 21. Regeret Cartesius, *Ideo necessarium esse, ut materia infinitè protendatur, quoniam ubicunq; fines ejus fingamus, semper ultra ipsos aliqua spatia indefinitè extensa non modò imaginamur, sed etiam verè imaginabilia; hoc est, realia esse percipimus, ac proinde etiam substantiam corpoream indefinitè extensam in iis contineri; quia scilicet idæa ejus extensionis, quam in spatio qualicunque concipimus, eadem plane est cum idæa substantiæ corporeæ.* Verùm hæc ratio subtilior videtur quàm solidior. Nam primò materiam actu infinitam nemo concipit, aut concipere potest; indefinitè verò protensam concipere, nihil est aliud quàm ejus terminos non attingere, vel nullos ei certos limites in animo defigere; sicut vulgus hominum telluris planitiem indefinitè protractam existimat, aut allans maris littori, incerto limite definitum æquor cogitat; vel sicut arenas maris indefinitè multas concipimus. Porro, ex eo quòd ultra præstitutas quascunque metas spatia quælibet imaginari possimus, nullo pacto sequitur actu materiam aliquam ulteriorem existere. Id saltem verisimiliter colligatur, ideo posse talem existere; quid nempe quicquid nos ut evidenter possibile percipimus, id valet divina potestas effectum reddere. Enimverò innumera nos imaginari posse, quæ nec sunt, nec erunt unquam, quis mentis compos inficias ierit? Nil repugnat, & facilè possem imaginari, non secus ac è vulgo quilibet, rati adnotatum modò, telurem ad summas cœli oras, & extrema mundi mœnia pertingere; possim Solem millies majorem, Lunam multis parasangis pro-

propinquiorem, ſtellas plurimis vicibus numeroſiores,& ſexcenta talia factu neutiquam impoſſibilia, neque penitus abſurda, mecum animo volutare, quæ tamen an idcirco vera erunt de facto? non certè magis quàm ſomnia quævis, aut ægrorum deliria. Imaginabilitas igitur quantumlibet realis ad ſummum rei poſſibilitatem aliquam, non actualem exiſtentiam ullatenus coarguit. Ex imaginatione non infinitus actu, ſed utcunque potentiâ finito (determinate finito) major mundus comprobetur. Verùm ut penitus agnoſcamus, ſumma ſua ſubtilitas hac in cauſa quantopere deſtituit & fugit Carteſium, imaginationis iſtius de ſpatiis ultramundanis noſtræ perſcrutemur & paulo perpendamus originem; illam certe, ſicut alias pleraſque non aliunde quàm ex ſenſibus noſtris hauſtam comperiemus. Cùm quippe nil ferè quicquam ſenſu quovis attigerimus, quin aliquid ultra ſitum pariter ſenſibile progrediendo fuerimus experti; præſertim cùm ad cœlum oculos elevando vaſtum undique χάσμα nullo perceptibili limite concluſum, & in ignotas nobis regiones procurrens intueamur, hinc immenſum quendam, ſeu indeterminatum cœleſtis ſpatii gurgitem, in quo nubes pendeant, venti diſcurrant, ſtellæ ceu piſciculi natent, noſtrâ in phantaſia deſcribendi nobis obrepit occaſio; à qua tamen ſenſione, vel ab imaginatione confuſa eam excipiente, perabſurdum videtur de vera mundi, ſeu finita ſeu infinita, extenſione quicquam inferre vel decernere. Nam omnis ſenſio eſt ſingularium, ab exiſtentia verò rei ſingularis compertam licet

quidem deducere, quòd aliud quid ſimile poſſit exiſtere, non autem quòd aliud quid actu ſit vel exiſtat, ut aliquoties admonitum eſt. Taceo quòd eodem jure paríque ratione, quibus materiæ neceſſaria tribuitur extenſionis infinitas, eidem æternitas & independentia tribuantur; nam prout ultra quoſlibet mundi limites aliquid ſpatii, ſic ante quodvis initium. Poſt quemvis finem aliquid temporis æquè clarâ cogitatione ſolemus imaginari; æterna proinde neceſſariò, & conſequenter etiam independens. Secundum hunc argumentandi modum materia demonſtretur, quæ tamen divinæ perfectionis idiomata periculoſum ſit, & Chriſtiano Philoſopho ſummopere cavendum, alteri quàm Opt. Max. Deo adſcribere. Ratum igitur fixúmque ſit materiam, ſeu molem corpoream non eſſe penitus interminatam, ſaltem non eſſe talem neceſſariò. Hoc primo ſupponatur. Adſumatur quoque ſecundò, quod Deo competat poteſtas, prout adſubeſſet ipſi, materiam exiſtentem adaugendi vel imminuendi, hoc eſt, è nihilo procreandi quantum velit, & quamlibet ejus portionem in nihilum redigendi. Jubet hoc fides, cogit pietas admittere; nec reclamat ratio, ſed potiùs ſuffragatur & ſuadet. Nam ex eo quòd concipere poſſimus materiam ampliorem quâvis præfinitâ, nil obſtat quo minus, imò ſatis evidenter inde conſectatur, quod Deus omnino valeat id effectum dare. Quòd ſi poteſt ampliare, pari poteſtate poteſt minuere, quámque de novo pertexuit telam eadem facilitate retexere valet; quinimo quiâ nobis contractiorem imaginari fas

eſt,

est, imò nullam supponere, divinæ potentiæ subjacebit illud præstare. Ad hæc tertiò facillimè concipitur, & nulla ratione negari debet, posse Deum quamcunque rem in suo quem nunc obtinet statu sitúque conservare, sic ut à nullis extrinsecus accidentibus immutetur intrinsicè, nedum ut ejus natura penitus destruatur: ut nempe recta linea, plana superficies, circuli circumferentia, sphærica orbicularitas tales permaneant, quicquid extra illas fieri contingat, hoc est, tametsi circumjacens omnis materia quomodocunque mutetur, tollatur, aut annihiletur. Quibus pro jure nostro legitimè suppositis, atque substratis spatii qualiscunque realitas à magnitudine distincta multis adstrui modis videtur. Primò, cùm materia possit esse finita, Deus autem essentiâ sit infinitus, ultrà materiæ fines subsistet, aliàs ejus limitibus clauderetur, aut finiretur utcunque, nec esset propterea infinitus. Ergo datur aliquid ultrà, hoc est, spatium qualecunque. Et nisi Deus ultra materiæ fines existat, posset imaginatio nostra locum confingere, ubi non est, adeóque divinæ existentiæ modum aliquatenus transcendere, nec immensum proinde Deum concipere possemus aut agnoscere. Tum Deus extra hunc possit alios mundos condere, sicut & nos conditos imaginari, non illos quidem nullibi, sed alicubi; dabitur igitur spatium aliquod, in quo collocari possint & consistere. Novis quoque productis mundis intererit Deus, absque eo tamen quòd omnino moveatur (immobilitas enim est & immutabilitas omnimoda, est indubitatum divinæ perfectionis attributum),

id quod aliter intelligi nequit, quàm concipiendo præsentem antea fuisse spatio, in quo jam reponuntur. Ergo quos habemus, aut habere debemus, de divina infinitate, potentia, immutabilitate conceptus spatii qualemcunque distinctam realitatem involvunt. Porro, materialis mundus ex hypothesi quam asseruimus terminatus aut terminabilis, aliquâ figurâ præditus erit, & proinde quâvis figurâ præditus supponi potest. Sit ergo sphæricus; & quod etiam supponere licet, statuatur alius eum contingens itidem sphæricus; is priorem unico puncto continget, igitur inter alia sphæricarum puncta medium quid, hoc est, aliquid spatii, interjacebit. Sumantur enim in contiguarum sphærarum superficiebus duo puncta quælibet, extra contactum, hisce dico spatium aliquod interjici; si neges, ergo duo ista puncta sese contingent, contra clarissimè demonstratum in Geometricis theorema. Item connectantur duo sphærarum illarum centra rectâ lineâ per contactum, ut Geometria quoque docet ac probat, transeunte, ductaque intelligantur è centris ad dicta extra contactum duo puncta duo radii; quoniam igitur ex adversariorum sententia dicta puncta sibi contigua sunt, è tribus rectis constituetur triangulum, cujus duo latera tertio adæquantur, itidem contra clarissimum & certissimum Geometriæ theorema. Rursus supponatur ubicunque in massa corporea duæ sphæræ concentricæ, ipsarúmque superficiebus interjacens materies annihiletur, aut amoveatur aliò (id quod à Deo præstari potest ex præstratis) ergo hæ superficies, si nihil intercedat spatii,

ſpatii, ſibi coincident, etſi millies iſta major ſit hac (ſupponamus enim ex antedictis quòd utraque ſphærica ſuperficies ſuam retineat magnitudinem, non obſtante medii corporis evacuatione, quæ extrinſecus accidit, & nihil in illis internum mutat; ipſarum utcunque magnitudinem & poſitionem ſartas tectas conſervante divinâ potentiâ). Eodem modo ſi verticem inter & baſim pyramidis quicquid intereſt medium auferatur, quando nihil ſpatii relinquitur, ipſa quoquam modo disjungens, punctum verticis adjacebit proximè punctis omnibus baſis, adeóque toti baſi congruet & adæquabitur. Hæc & innumera talia conſectari videntur ex negatione realis ſpatii, communibus hominum conceptibus non minùs quàm Geometricis decretis repugnantia. Præterea duriuſculum videtur, ut mundana materia quoad ſe totam planè ſtatuatur immobilis, aut poſito rei dilucidandæ gratiâ, præter unam ſolidam ſphæram nihil uſpiam exiſtere, quòd iſta ſphæra ne quidem à Deo transferri poſſit, aut circa axem rotari; neque περιφορὰν (ut Platonicis utar vocabulis) admittere. Id quod ſatis infert manifeſte ſublatio ſpatii. Nam quum in hoc utrovis motu, partes eundem inter ſe retineant ſitum, eandémque diſtantiam, quomodocunque feratur totum, non aliter concipi poteſt ipſum moveri, quàm ex ſpatii ſucceſſiva mutatione, ſcilicet ut una pars ſpatium ſubingrediatur à priore derelictum, unde negato ſpatio tollitur ejus mobilitas. Stringit hoc quod alicubi notat Ariſtoteles; Ὅτι οὐκ ἂν ἐζητεῖτο ὁ τόπος, εἰ μὴ κίνησίς τις ἦν ἡ κατὰ τόπον· διὰ τοῦτο γὰρ τὴν

φανὸν μάλιστα διόμεθα ἐν τόπῳ, ὅτι δὲ ἐν κινήσει· i. De loco vel spatio disquirendi solus præstat occasionem motus, (qui scilicet absque spatii positione vix concipi potest) cœlúmque præ omnibus potissimè videtur esse in loco, quia maximè movetur : nec tamen id (respectu primi præcipuíque motûs diurni, quem respicere videtur Philosophus) secundum partium situm ac distantiam ullarenus variatur, at quasi tota circumfertur. Quatenus ergò movetur aut non movetur omnino, quatenus partes ejus spatia sua permutant, quæque nunc Eoas plagas obsident, mox eædem meridianum culmen attingunt, ipsúmque confestim prætervectæ vespertinas ad oras declinant. Neque sufficiet hîc actionem à motu secernere cum Cartesio, quando præter spatii mutationem nullus cogitari possit actionis istius effectus. Unicam hisce superaddam ratiunculam : Quæro quid efficiat ut inter duo distantia corpora facilis sit commeatus, proclivis itus reditúsque ; annon quia medium his interjicitur spatium eis intro recipiendis paratum? Quid contrà faciat, ut difficile possimus inter duo contigua corpora medium aliud intrudere, imò non possimus omnino, nisi motum illis imprimendo satis validum, quo procul amandentur, & à se invicem sejungantur ; annon quia deficit interstitium medii corporis capax? Supponatur, e.c. inter duo corpora A, B corpus aliud C residere, tùm intelligatur hoc corpus C amoveri, sic ut non permittatur aliud succedere, ablatâ scilicet corporum circumstantium propensione ad motum, vel inhibito parumper effectu (per fu-

ſuperiorem potentiam) ex eo ſecundùm adverſarios immediatè, nullâ aliâ vi adhibitâ, nullâ actione interveniente, reſultabit corporum A,B contiguitas arctiſſima; ſymplegadum inſtar ſponte ſuâ collidentur, & continuò nullus hiatus relinquetur; adeóque difficilimum evadet, ut corpus C impetu converſo ſe in priorem locum reſtituat, vel corporibus A,B rurſus intercedat, niſi corpora iſta validâ virtute disjungantur. At vix intelligi poteſt, cur tantopere vis major requiratur ad tantillùm ſemovendas res ſibi contiguas, quàm ad quantâlibet diſtantiâ ſeparatas ſibimet admovendas; quamobrem tam ultroneè coëant, tam dirimantur invitè: quid in cauſa ſit quòd priorem ſtatum nullo negotio, nullo cum motu deperdant, in eundem vix niſu vehemente, motu multo reponantur; cùm ſicut à Thebis Athenas, & ab Athenis retro Thebas eadem ſit via, ſic ad conjungenda quæ diſtant, & reciprocè disjungenda quæ aſſident, vis eadem, par motus, ejuſdem ſpatii pertranſitio poſtulari videatur. Quinimo ſubobſcurum eſt illud quamobrem juxta contrariam ſententiam eodem inſtanti, quo corpus medium elabitur, non confeſtim attingant ſe ripæ, & non ſucceſſuræ materiæ præcludatur intergreſſus; cùm vix infinitè velox, nedum tardus (quales in natura pluſculi dantur) & teſtudineus ſufficere videatur motus ei congreſſui præveniendo, utpote cùm hîc nullam actionem deſiderat, & per meram inſtantiſſimè reſultantiam emergat. Quòd ſi faciliùs, aut citiùs coaluerint corpora terminantia, quàm intercurrentis materiæ pars

ingruens præcedentem assequatur, obstruatur oportet omnis fluxus, & motus sistatur ac auferatur, id quod nemo nescit quàm perpetuæ discordet experientiæ. Annon simpliciùs & clariùs expediantur hæc dicendo, propterea per adjacentium corporum commissuras iter perrumpi difficiliùs, eò quod deest intervallum, quo corpus influens recipiatur; sed inter nonnihil dissitos corporum terminos idcirco promptum haberi transitum, quia campus exporrigitur medius, penetrabilis & capax ingressuri tanti corporis; adeóque si depleatur vasculum non collabi latera, nec si repleatur divelli (quum impossibile videatur illud, & hoc minimè necessarium) sed positionem eandem, eandem intercapedinem, eandem capacitatem invariatè retineri. Prætereo quas pro vacuo spatio (seu coacervato, seu corporibus interspersо) rationes adducunt & experimenta physica, tum quia nimium in his etiamnum contrivi temporis, & adhuc operæ multum deposceret illorum examinatio, tum quia pleraque solvi vel utcunque possent eludi per materiæ subtilis, motûs circularis, & indefinitæ divisibilitatis non absonas adeò, nec inconcinnas hypotheses. Ita fermè disceptatur utrinque; quid ergo tandem statuemus? quomodo conciliabimus has adversa fronte pugnantes verisimilitudines & undique circumsidentia nos incommoda declinabimus? Nihil ego certè, nihil in re tam ardua lubricáque pro vero venditem, aut asseverem confidentiùs; at si dicendæ sententiæ necessitas incumberet, & quid vero mihi videatur similius in medium cogerer producere, ne conceptibus

ceptibus hominum nimis adverſarer, & ſacroſanctis Geometriæ ſcitis impingerem, dicerem primò ſpatium revera dari, diſtinctum à magnitudine; hoc eſt, illo nomine deſignari quid, ei conceptum reſpondere, fundatum in re, alium à conceptu magnitudinis, ac ita quidem ut ubi non exiſtit magnitudo, quamvis ea non exſiſteret omnino, ſpatium nihilominus extiturum. Dicerem ſecundò, ſpatium non eſſe quid actu exiſtens, actúque diverſum à rebus quantis, nedum ut habeat dimenſiones aliquas ſibi proprias. à magnitudinis dimenſionibus actu ſeparatas. Quid ergo erit? quid ſibi vult hic griphus? Non admodum mihi placeo, nec audeo ſperare me vobis ex reſponſo meo ſatisfacturum; at quia dicta lex eſt reſpondeo, ſpatium nihil eſt aliud quàm pura puta potentia, mera capacitas, ponibilitas, aut (vocabulis iſtis veniam) interponibilitas magnitudinis alicujus. Mentem meam explicatam dò: olim ante conditum mundum, nullum alicubi corpus exſtitit (ut credere fas eſt & pium) at potuit etiam tum exiſtere quantumcunque corpus, potuit hoc determinatam poſitionem obtinere, volente ſcilicet & effectore Deo: hoc eſt, fiat ſpatium. Ultra molem mundanam nullum corpus excubat, nulla reperitur actualis dimenſio; verùm poteſt ultra ipſam corpùs aliquod conſtitui, aliqua realis dimenſio extendi, hoc eſt, datur ſpatium ultramundanum. Inter hos parietes omni per divinam potentiam exclusâ diſtentâque materiâ, nullum corpus jacebit, at poterit aliquod reponi hoc eſt, datur ſpatium illis interjectum. Inter duas denique magnitudines

tudines adjacentes ſeu contiguas, nulla magnitudo poteſt interponi; hoc eſt, nullum datur inter ipſas ſpatium aut intervallum. Poteſt inter duas iſtas turres protendi funiculus decempedalis, hoc eſt, datur inter ipſas ſpatium ſeu diſtantia decempedalis. (Ubi poteſt obiter adnotari ſpatii cujuſlibet ſingularis naturam eſſe quodammodo determinatam, & quodammodo indefinitam; determinata quidem quoad Mathematicam ſpeciem & quantitatem figuræ ſuæ (eſt enim capacitas non omniſcunque, ſed talis & tantæ magnitudinis) indefinitam quoad alias qualitates, & phyſicam ſpeciem, nec non quoad individuitates, ut ita loquar, magnitudinum; (eſt enim capacitas cujuſvis magnitudinis tantæ talíque figurâ præditæ: inter tera nempe vaſis cubici ſpatium habetur recipiendo cuivis tanto cubo ſeu aqueo ſeu aereo; non verò poteſt adæquatè occupari, vel repleri à corpore pyramidali vel ſphærico, neque majorem cubum admittet.) Hinc non denotatur ſpatii vocabulo διάστημα, quodvis poſitivum, actuali dimenſione præditum, actu extenſum ex ſe, vel diviſibile, vel terminatum, vel pertranſibile, vel congruum corporibus; at ſolummodo notat & ſignificat corpus aliquod taliter extenſum, eo modo figuratum, tali menſuræ adaptabile, vel ſimul unâ vice, vel ſucceſſivè per motum exiſtere poſſe. Non actualem aio, ſed naturæ tantùm ſuæ conſentaneas agnoſcit figuras, dimenſiones, partes, nempe potentiales; hoc pacto, capacitas admittendi corporis alicujus includit capacitatem admittendi (reſpectivè) lineas & ſuperficies; potentia lineam

neam quadrupedalem interponendi continet potentias interponendi lineam pedalem, & bipedalem, & tripedalem, & alias minore numero denominatas. Potentia circulum intersecandi potentialem, implicat rotunditatem perfectam. Neque quantum aut quale sit spatium immediatè vel ex se primò determinari vel agnosci potest, nec nisi per mensuram, aut determinationem magnitudinis alicujus realis ipsam occupantis; ut v. g. spatium duabus urbibus interjectum quantum sit aliter dignosci nequit, quàm designatæ super terram (vel aerem transeuntis) lineæ quodam pacto longitudinem emetiendo. Nec ideò merum nihil est aut temerè confictum hoc nomen, sicut hircocervi vel chimæræ, sed in eodem entium ordine, quo creabilitas, sensibilitas, mobilitas, & cujusmodi possibilitates, merito jure reponendum (illis verò nemo ferè non aliqualem adjudicat realitatem) nec sermè video cur hujusmodi spatium non æquè sit ens, ac ipsa contiguitas, cui directè videtur opponi. Contiguitas enim est modus magnitudinum significans nullam ipsis motu secluso interponi posse magnitudinem; spatium verò contrà modus earundem, quo innuitur aliam magnitudinem interponi posse, vel adponi; quamvis loco neutiquam emoveantur. Hac autem spatii notione suppositâ concessâque licebit utriusque prædictæ sententiæ nodos solvere, difficultates amoliri. Nam imprimis nihil hinc divinæ perfectionis prærogativis decedit, ens aliquod subrogando, realiter æternum ac infinitum, non productum, & non dependens à Deo; sed asseritur potiùs

tiùs ipſius illimitata poteſtas, corpora pro lubitu ſuo producendi diſponendique. Neque coincidet hujus talis ſpatii idæa cum idæa magnitudinis, aſt ab ea tantum quantum ab actu potentia differet atque diſtabit. Nec alia præter ſubſtantiam & accidens entia nova refert in cenſum, ac realis mundi donat civitate, ſed utriuſque modum duntaxat aliquem, & poſſibilitatem connotat. Nec alium locum deſiderabit hoc ſpatium; quia nuſquam actuali modo exiſtit, at ubique ſaltem erit ſuo modo, quia Deus ubique poteſt magnitudines collocare. Neque diſconvenit hoc cum communi ſenſu ac ſermone hominum, qui cùm ſpatium intercedere cogitant aut pronunciant, nihil intelligunt aliud, quàm inter deſignatos terminos poſſe corpus aliquod interponi. Nec materiæ deducatur hinc infinitas ulla, ſed utcunque talis extenſio conſequetur, qualem ei Deus ultro volet aſſignare. Nec ubiquitati divinæ derogat omnino, quæ nil aliud ſignificat, quàm omni ſpatio Deum adeſſe, vel ubicunque res aliqua poteſt exiſtere. Cum Geometria vero conſpirat & congruit ad amuſſim; nec enim deposcit hæc, ut inter duo puncta, vel duos quoſcunque terminos medii quid actu reale ſemper intercedat, at ſaltem nonnunquam (in aliquibus caſibus) ut linea, ſuperficies, aut corpus poſſit intercedere. Satisfacit etiam Phyſicorum experimentis & phænominis, vacui tantum eis præbens, quantum ſufficit recipiendis corporibus, & motibus ſuis peragendis, nec tamen aliquid immiſcens fictitii vacui veris actualibus dimenſionibus induti, quale partem mundi dimidiam,

midiam, corporúmque principium cum aſſeclis ſuis ſomniavit Epicurus. Ut præteream quomodo pateat hinc, quòd immobile ſit ſpatium, neque cum corporibus aſportetur; quia nempe cùm corpus unum alterorum confinium aut interſtitium deſtituit, remanet nihilominus iſta poſſibilitas, & nihil hinc obſtat, quin alia corpora æquè vicina, pariter intermedia ſubſtituantur & ſuccedant. Obiter adnoto quam deſcripti ſpatii notionem illi, quam tradit D. Hobbius ſpatii, definitioni penè videri è regione contrariam. Spatium is definit, *Phantaſma rei exiſtentis quatenus exiſtentis.* At ſi ſpatium eſt phantaſma (ut ſane non eſt, ſed objectum phantaſmatis, imaginabile quid, non ipſa imaginatio, nec imaginationis effectus) phantaſma potiùs erit rei ſeu poſſibilis, quàm ut exiſtentis. Quippe cùm ſpatium concipimus, magnitudinem aliquam poni, vel exiſtere poſſe, non ſemper actu poſitum aut exiſtens concipimus, ut ante mundum conditum, vel extra mundum præſentem, ſecundùm prædicta. Quod & ipſius præmiſſis ratiociniis magis convenit, quam ejus propria, quam ex iis colligit, definitio. Nam confecto rerum omnium interitu, remanſurum affirmat in animo ſpatii phantaſma; atqui fingere res omnes ſublatas, & eaſdem velut exiſtentes cogitare ſunt ἀσύστατα· reſtabit potiùs idæa rerum ceu poſſibilium. Quin ipſe totidem verbis ait, *Nemo ſpatium ideo eſſe dicit quòd occupatum ſit, ſed quòd occupari poſſit*; à vero non abludens, ſed à ſeipſo diſſentiens: ſpatium enim per occupationem quodammodo definit eſſe ſpatium, quatenus per actum

Cap. VII. de Corp.

actum potentia velut extinguitur & ceſſat ulteriùs poſſibile, cùm quid jam exiſtit: nec male vulgò dicitur in vaſculum repletum nihil infundi poſſe, propter defectum ſpatii. ſed me neſcio quæ blanda Siren quantumvis refugientem allicit, & ſcopulis ſuis affixum, caſſibus ſuis irretitum detinet; ad interioris Matheſis portum velis omnibus remiſque contendenti remoram injicit hæc qualis qualis ἐξωτερικὴ philoſophia. Ut hanc de ſpatio παρέκβασιν, nimis equidem prolixam & ſpatioſam, aliquando claudam, & ceu figuram terminis circumſcribam, unicum ſolummodo propoſito meo conducens inſuper monebo, quòd nempe quicquid Phyſici ſtatuant, hæc quam hactenus deſcripſi ſpatii concipiendi ratio cùm optimè quadrat, tum abundè ſufficit Geometris; ſi quid majus ineſſe deprehendatur, aut attribuatur illi, neutiquam id iis officiet; aſt nil amplius deſiderant, quàm ut talis concedatur intercapedo, quâ figuræ magnitudinum, ſalvis ſuis proprietatibus, incolumes perſiſtant, ut hæ per poſſibilem annihilationem aut remotionem, non confundantur aut pervertantur. E. g. Si duo circuli vel duæ ſphæræ ſeſe contingant, & accipiantur, ut ſupradictum eſt, duo extra contactum (in circumferentia circuli, vel in ſphæræ ſuperficie) puncta, flagitat Geometria non ut aliqua realis & actualis linea recta duobus iſtis punctis interjaceat, ſed tantùm ut potentialis quædam intercedat, hoc eſt, ut aliqua duci vel interponi poſſit, vel ut ſeſe non contingant, ſiquidem repudiato tali interſtitio vel adſerto punctorum iſtorum contactu, circulorum & ſphærarum natura

pe-

perimitur, proprietates peſſundantur. Tale ſpatium igitur indulgeri debet Geometris, ipſorum hypotheſibus ſubſternendum; eóque magis id quoniam congruentia, commenſuratio, determinata poſitio, motus, & ipſa quadantenus proportio magnitudinum cum eo cohærent, per id explicari poſſunt. Nam congruentia per ejuſdem ſpatii poſſeſſionem, menſuratio per applicationem aut ſucceſſionem congruam, ſitûs determinatio, motúſque per ſpatii identitatem, & alterationem commodè deſcribuntur, & quomodo pendeat ab his, his adhæreat, per hæc elucidetur proportio, poſthac forſan apparebit. Ex dictis, ut hæc accommodemus inſtituto noſtro, licebit Mathematico tales hypotheſes procudere. Ponatur hoc aut illud ſpatium poſſe occupari, hoc eſt, quòd inter deſignata puncta, datas ſuperficies, expoſita corpora (quæ nempe propter naturæ ſuæ proprietatem, aut ex præcedanea quapiam ſuppoſitione ſeſe non contingunt) lineæ, ſuperficies, aut corpora (reſpectivè) poſſint interponi. Viciſsimque ponatur quamvis magnitudinem ſpatium occupare, hoc eſt, ipſam inter contiguas magnitudines non poſſe collocari, ſed adjacentes utrinque magnitudines ab ipſa dirimi & elongari, pro modo poſitæ magnitudinis. Ponatur etiam nullum uni ſingulari magnitudini ſpatium alligari, ſed ab innumeris aliis (pro modulo ſuo, ac magnitudinum circumpoſitarum exigentia) poſſe ſucceſſivè, ſicuti res feret, adimpleri. (Eſt enim ſpatium, ut antehac expoſitum) non peculiaris aliqua, ſed quodammodo generalis & indefinita capacitas) nec non reciproce, quòd

quòd nulla magnitudo ſingulari cuipiam ſpatio aſtringetur. Adhuc ponatur, vel ut conſectarium è dictis axioma utcunque affirmetur, Quod plures magnitudines idem ſpatium nequeant ſimul occupare (adæquatè ſcilicet). Nam actus plures etiam plures arguunt potentias; vel unus actus unicam potentiam penitus explet ac exhaurit; ergo plures magnitudines plura requirunt ſpatia, vel una magnitudo totam unius ſpatii conſtitutivam capacitatem devorat. Sicut exiſtentiam Petri totam Petri poſſibilitatem complet & quaſi ſatiat, efficiens nè poſſit alius idem numero Petrus exiſtere. Item quâ ratione plures aliquæ magnitudines unum ſpatium occupant, eâdem quotlibet aliæ poſſent idem illud ſpatium occupare; unde tota magnitudinis poſſibilis infinitas in unum hordeacei grani ſpatium poſſit coarctari; quod abſonum & abhorrens videtur à ſana ratione. Demum ex eo quod idem ſpatium obtineant magnitudines, terminationem etiam & extenſionem, & reliquas his connexas magnitudinis affectiones poſſidebunt eaſdem, adeóque plures illæ prorſus evadent eædem; præter enim iſtas affectiones quod magnitudinem conſtituat aut diſtinguat, nil fermè quicquam concipimus, aut opinor concipere poſſumus. Cæterum quod hæc poſtrema ſuppoſitio (ſeu quis malit axioma) pronunciat & præ ſe fert, exprimi ſolet impenetrabilitatis vocabulo, cui nonnulli primas partes deferunt inter omnia magnitudinis attributa, quàm meritò viderint ipſi; mihi nulla προσωπολη-ψία placet, omnéſque reciprocæ affectiones pari loco

ſunt.

ſunt. Id tantùm nobis ex uſu fuerit advertere poſitionem ejus (ratione ſubnixam, ut vidimus, & experientiæ quantum ſcimus perpetuæ conſentaneam) Mathematicis eſſe perneceſſariam. Ei ſiquidem innititur quicquid ex corporum pulſione, ſeu vi pulſiva, deducitur in Mechanicis; quicquid ex motuum dependentia ſuboritur in Geometria (qualis eſt illa à Carteſio excogitata elegantiſſima curvarum linearum deſcriptio, in ejus Geometria, quæ regularum tractione vel impulſu certa ratione ordinato peragitur) quòd ſi plures magnitudines idem ſpatium ſimul poſſent occupare, vel quod perinde dicatur, una poſſit aliam penetrare, non una neceſſariò cederet alteri, ſed immota perſiſtens alteri tranſitum præbere poſſet, unde vana foret pulſionis ſuppoſitio, nullus reſultaret (ex ſcientifica ſaltem neceſſitate) effectus. Itaque neceſſariò ſupponitur à Mathematicis magnitudinum impenetrabilitas, ideóque non abs re fuit illius cum ratione conſenſum, quódque non illicitè ſupponi debeat, oſtendiſſe. Pari jure vice versâ ſupponi poteſt, quòd nulla ſingularis magnitudo plura ſimul ſpatia poſſit occupare. Nam unus actus pluribus potentiis ſatisfacere nequit; nec poſſibilitas ut Petrus & Socrates exiſtant, ſolâ Petri exiſtentiâ completur. Item qua ratione ſingularis una magnitudo plura ſpatia poſſideat, eâdem quibuſcunque ſpatiis poſſidendis ſufficiat. Poſſit igitur granum papaveris, aut arenulæ minutiſſimæ magnitudo quicquid uſpiam eſt ſpatii replere, totíque poſſibilis magnitudinis infinitati coextendi; quod nemo ſanus in animum facilè inducat

cogitare. Ut præteream, quòd eadem magnitudo plura ſpatia occupando plures extenſiones, terminationes, & reliquas magnitudinis affectiones ſortiretur, unde non una magnitudo perſtaret, at in plures evaderet. Nec inutilis eſt hæc ſuppoſitio, ſed perquam neceſſaria Mathematicis. Non ex ea dependet quicquid ab illis de poſitione determinata ſupponitur aut demonſtratur. Nam quomodo, e. c. non fruſtra ſupponitur aut oſtenditur punctum aliquod intra vel extra circulum quempiam exiſtere, ſi poſſit ſimul intra ac extra exiſtere? Quomodo dicatur iſta linea cum hac talem aut tantum angulum efficere, ſi poſſet alium ſitum tunc una obtinens alium quemvis angulum conſtituere? Quomodo recta curvam tangere demonſtretur ex eo, quòd tota præter unicum punctum contactûs extra curvam cadat. quum non repugnet ſimul in illa, vel etiam intra illam jacere? Quomodo denique punctum aliquod non eſſe centrum circuli propoſiti comprobetur inde, quòd diametrum non biſecet, ſi propter varios poſſibiles ſitus poſſet idem punctum biſecare ſimul, & non biſecare diametrum? Quicquid igitur ſit de Theologia Pontificia, niſi vera ſit hypotheſis, eandem magnitudinem aptam natam non eſſe plura ſimul ſpatia occupare, penitus actum erit de tota Geometria. Sed de poſitione determinata quicquid obſervatu dignum eſt, non jam licet attexere; prout neque de reliquis aliis magnitudinum ſymptomatis, quæ ſequentibus aſſervanda ſuperſunt. Unicum inſuper monitum adjiciam, magnam tempori cum ſpatio cognationem,

& &

& analogiam intercedere. Sicut enim ſpatium ad magnitudinem, ita ſe tempus habere videtur ad motum, ita ut tempus ſit quodammodo ſpatium motûs. Quum enim tempus dicitur (annus puta, menſis, vel dies) nihil aliud indigitari videtur, quàm talem aut tantum interea motum peragi, vel intercedere, vel interponi poſſe; ſcilicet una periodus Solis in Ecliptica, reditus unus Lunæ ad Solem, una cœli (vel terræ) circa ſuum axem revolutio. Sed hoc obiter, nam ut de tempore jam diſſeratur pleniùs, ipſum tempus vetat & refragatur.

LECT. III.

DE natura ſpatii, déque nonnullis ei ſuperſtructis vel adnexis hypotheſibus Mathematicis, ſatis fusè diſquiſitum eſt in Lectione præcedente. Proxima magnitudinis affectio circumſpectantibus objicit ſe (quippe non ita procul à ſpatio diſſita, ſed ei propiùs adjacens) congruentia, cujus certe ſuppoſitio quodammodo primarius eſt tibicen, & præcipuum fulcrum totius Matheſeôs. Nam ab ea æqualitatis (quæ quidem in Mathematicis utramque ferè paginam facit, & quam Proclus Πρῶτιστον ἐν τῷ ποσῷ συμπτομα, principaliſſimum & quaſi primiſſimum in quantitate ſymptoma vocat) optimè meâ ſententiâ formalis ratio deſumitur; ſaltem ejuſdem de facto veluti potiſſimum κριτήριον, & palmarium adhibetur argumen- *Ad 4. I.*

tum. Id quomodo sit operæ forsan pretium fuerit ostendere. Quarta primi elementi propositio (quæ à Proclo Ἐν θεωρήμασιν ἁπλούστατον & ἀρχοειδέστατον non admodum immeritò dicitur) comprobans æqualitatem duorum triangulorum habentium æqualia duo crura, hisque comprehensos angulos æquales (quoad omnia æqualitatem) demonstratur ex laterum & angulorum congruentia (adsumpto tantùm axiomate, duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt, vel potius hoc eodem recidente, Duæ rectæ lineæ terminos habentes eosdem congruent). Ab hac (adhibito duntaxat axiomate, eóque etiam per congruentiam demonstrabili (sicut post hoc ostendemus) si æqualibus æqualia addantur tota, vel si ab æqualibus æqualia subtrahantur residua sibimet exæquantur) demonstratur æqualitas triangulorum ac parallelogrammorum super easdem bases, & inter easdem parallelas constitutorum. Inde per axioma, Quæ eidem æqualia sunt, æquantur sibi mutuò (quod itidem axioma per congruentiam demonstrari potest) de parallelogrammis atque triangulis super æquales bases constitutis idem demonstratur. Ab his, adhibitâ solummodo præterea proportionalium definitione, deducitur parallelogrammorum & trigonorum æquè altorum cum suis basibus, vel æquales bases habentium cum suis basibus proportionalitas. Hinc æquiangulorum triangulorum similitudo, tum in æqualibus & unum angulum æqualem habentibus triangulis & parallelogrammis reciproca laterum (circa pares angulos) proportio, permutatímque

ex

ex reciproca proportione laterum æqualitas figurarum, aliæque reliquæ quæ præsertim in sexto continentur elemento planarum figurarum affectiones principales derivantur. Aliter etiam (non adhibita quartâ primi elementi) ex solâ ferè congruentiâ deducantur istæ triangulorum & parallelogrammorum æqualitates atque proportionalitates supradictæ, per egregiam illam à Cavallerio non ita pridem in lucem usumque communem protractam methodum indivisibilium, fœcundissimam novorum in Geometria repertorum matrem. Cujus certè pulcherrimæ & utilissimæ methodi (sicut ejus author ipse non obscurè insinuat) fundamentum in congruentia ponitur, ex congruentia demonstratur, sicut apparebit primas libri de Geometria indivisibilium secundi, vel itidem primas aliquot Exercitationis primæ ejusdem auctoris, propositiones attentiùs inspectanti. Octava quoque primi elementi propositio (circa æqualitatem angulorum subtensorum æqualibus lateribus, in triangulis sibi mutuò æquilateris) quæ Geometricorum Theorematum est altera uberrima scaturigo, per omnem eam præsertim quæ circulorum affectiones speculatur Geometriam diffusa, demonstratur isthic, nec aliter demonstrari potest, quàm (immediatè scilicet aut mediatè) per hanc ἐφάρμοσιν. Ut præteream particulares alias complures, quæ hujus suppositione ac subsidio nituntur demonstrationes, extantes apud Archimedem, Pappum, & alios insignes Geometras. Unde meritò vir acutissimus, Willebrordus Snellius luculentissimum appellat Geometriæ supellectilis

Snell. præf. ad Cyclometr.

instrumentum hanc ipsam ἐφάρμοσιν. Eam igitur in demonstrationibus Mathematicis qui fallidiunt & respuunt, ut Mechanicæ crassitudinis ac ἀυθεργίας aliquid redolentem, ipsissimam Geometriæ basin labefactare studeant; a't imprudenter & frustra. Nam ἐφάρμοσιν Geometræ suam non manu sed mente peragunt, non oculi sensu sed animi judicio æstimant. Supponunt (id quod nulla manus præstare, nullus sensus discernere valet) accuratam & perfectam congruentiam, ex eáque suppositâ justas & logicas eliciunt consequentias. Nullus hîc regulæ, circini, vel normæ usus, nullus brachiorum labor, aut laterum contentio, rationis totum opus, artificium & machinatio est; nil Mechanicam sapiens ἀυθεργίαν exigitur; nil, inquam, Mechanicum, nisi quatenus omnis magnitudo sit aliquo modo materiæ involuta, sensibus expositâ, visibilis & palpabilis, sic ut quod mens intelligi jubet, id manus quadantenus exequi possit, & contemplationem praxis utcunque conetur æmulari. Quæ tamen imitatio Geometricæ demonstrationis robur ac dignitatem nedum non infirmat aut deprimit, at validiùs constabilit, & attollit altiùs, ad sumptæ suppositionis realitatem ac possibilitatem, (quæ sanè genuinum est, ut sapiùs innuimus, omniscunque scientiæ fundamen) ipsis offeutans sensibus, & rationis auctoritatem fulciens suffragio experientiæ. Virorum adeo maximæ, non labis alicujus aut vitii demonstrationes accusant congruentiam adhibentes, qui Mechanicæ cognationem illis adspergunt; nil eis revera aliud quàm familiaritate n & facilitatem eximiam, nimi-

ara

am evidentiam, & quasi nobilitatem exprobrantes. Sanc nec ipse Ramus, quanquam in veteres haud æquus adeò vel benignus quid hîc habet quod culpet, at calculum suum adponit perlibenter, & à congruentia ductam argumentationem vehementer adprobat, collaudat, usurpat. *Hoc*, inquit, *demonstrationis Euclideæ genus tam expeditum, támque facilè, vehementer amplector.* Sed quid receptum communiter ac ab ipsis Geometriæ principibus & coryphæis (Euclide, Archimede, Apollonio, Pappo, aliísque) usurpatum demonstrandi modum contra sciolos nescio quos, propugnatum eo? Quin ejus potiùs naturam, & qualis sit hæc congruentia Mathematica propiùs intueamur. Congruentiam per ejusdem loci vel spatii occupationem, possessionem, repletionem describi solet. Eam verò triplici modo factam concipere licet; per applicationem, per successionem, per mentalem penetrationem. Per applicationem, cùm una magnitudo superimposita vel apposita concipitur alteri, sic ut illam omnibus sui partibus immediatè contingat, & nusquam ab ea recedat aut separetur. Ut cùm mensura rei mensuratæ (virga putes mensoria telæ limbo, vel rectæ lineæ super terræ planiciem designatæ) applicatur & coextenditur; in qua applicatione partes unius longitudinis omnes alterius partibus exactè respondent, & aliæ alias immediatè contingunt, adeóque illæ sibi invicem congruunt hoc modo. Per successionem, cùm unius magnitudinis amotæ locum ingredi concipitur altera (veluti cùm effusâ aquâ è vasculo vinum infunditur) congruere dican-

Schol. Math. lib. VIII. 170.

tur istæ magnitudines, ob identitatem spatii quod occupant successivè. Per mentalem penetrationem, cùm duorum corporum magnitudines per ejusdem loci simultaneam possessionem coalescere, coincidere, & tanquam coadunari cogitamus. Quo fere pacto supponunt Perspectivæ scriptores inter oculum & objectum radians interpositam tabulam, velut ubique perspicuam, à lucido quasi cono vel pyramide penetrari, sic ut trajicientes radios nusquam impediat, at recipiat in se cunctos, eorúmque vestigia sibi velut impressa vel unita retineat. Ex hisce congruentiæ modis, quæ per applicationem fit ex parte rei, solis quadrat lineis ac superficiebus, quæ ob indivisibilitatem suam possent aliæ alias se totis immediatè contingere; & per hunc contactum seipsas quasi penetrant, & in unum coincidunt. Unde taliter congruas lineas & superficies (hoc est, ita sibimet adjacentes, ut medii nihil interjaceat spatii) pro unis habent Geometræ. Id voluisse videtur Euclides, cùm negavit à duabus rectis lineis spatium comprehendi; ut & quòd duo plana solidum spatium non concludunt. Et quæ plures lineas contiguas, aut se intersecantes terminant, puncta semper habent pro uno communi puncto; ut & quæ plures superficies conjunctas, aut se mutuò secantes dirimunt, extremas lineas pro una sumunt linea; & quæ corpora dispescunt superficies, in unam supponunt coalescere. Id sibi postulandum censuit Vitello, nempe cùm duæ superficies planæ contingunt, unam ex iis fieri superficiem. Patigue ratione circularis annuli peripheria con-

concava convexæ circuli concentrici inclusi peripheriæ, vel annuli sphærici concava superficies adjacentis sphæræ concentricæ convexæ superficiei coincidit. Corpora verò, propter introversum reductam profunditatem suam, solis externis superficiebus contiguæ fiunt, adeóque nullâ parte sui congruere possunt, hoc applicationis modo. Quapropter è recentioribus non nemo negavit iis ἐφάρμασιν omnino competere. At saltem ad omnes universim magnitudines, quæ per successionem fit (mediante scilicet communi spatio) congruentia pertinet & extenditur. Quatenus nulla magnitudo cuilibet uni spatio, neque vicissim ullum spatium uni magnitudini peculiariter astringatur, & ab una derelictus locus ab alia tanta talíque magnitudine possit occupari. Mentalis denique congruentia magnitudinum, etiam solidarum (quicquid prædictus arbitretur Philosophus) haud absurde supponitur à Geometris. Namque primò per eam non asseritur actualis seu realis penetratio, sed tantùm abstrahitur mente, vel in considerationem non venit corporum vis exclusiva penetrationem realem impediens: seu generalis & indefinita capacitas admittendi tanti corporis, quæ præcipua spatii proprietas est, per se sola seperatim consideratur. Quem concipiendi modum sæpe falsitatis absolvit Philosophus; οὐδὲ γίνεται ψεῦδος, inquit, χωρίζοντων. *Phys. II. 2.*

Secundo, mentalis ista penetratio non aliter supponitur à Mathematicis, quàm ut per eam destruatur realis penetrabilitas, & absurda demonstretur. Nam ex eo quòd supponatur duo corpora locum eun-

(dem

dem occupare oſtendunt, eandem eſſe utriuſque magnitudinem, & proinde quòd ſe penetrando deſinant eſſe duo; adeóque quòd duo (formaliter duo) ſeſe nequeant penetrare. Licet autem quidvis utcunque falſum vel abſurdum ſupponere, quo meliùs iſta falſitas aut abſurditas dignoſcatur. Nec aliâ ferè ratione falſitatis argui poſſit ulla propoſitio negativa, quàm τῇ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ, hoc eſt, ex ejus veritate ſuppoſitâ conſequentia falſa detegendo. Sic igitur penetrationem hanc ἐξ ἐπινοίας ſuppoſitam adhibent Mathematici, prout adhibent illi, qui magnitudinis ipſam impenetrabilitatem, ex penetratione ſuppoſita, conantur demonſtrare. Ipſam enim uſurpant Mathematici duntaxat indicandæ vel comprobandæ magnitudinum æqualitati vel inæqualitati, hoc utique pacto: aſſero duas ſphæras æqualibus diametris deſcriptas æquari; nam concipiatur unius centrum alterius centro congruere, inde propter æqualitatem radiorum quorumcunque, uniuſcujuſvis extima ſuperficies alterius ſuperficiem non tranſcendet, ergò congruent totæ duæ ſphæræ, ergò magnitudinem eandem habebunt, hoc eſt, æquales erunt. Quod ſi ponatur unius diameter alterius diametro major, congruentibus (ut priùs κατ' ἐπίνοιαν centris unius ſuperficies ambiens alterius ſuperficiem excedet, (quippe quæ propter ſuppoſitos inæquales radios e communi centro longiùs diſtet) ergò non erit eadem utriuſque magnitudo; hoc eſt, ex propterea inæquales erunt. Quòd ſi quis fictitiæ huic penetrationi nihilominus moroſiùs obloqui pergat, ut ei fiat ſatis, adji-

cio

cio mentalem illam congruentiam concipi posse per modum successionis, intelligendo scilicet unum subduci vel evanescere, alterum in ejus locum substitui; hoc est, iisdem terminis interponi, vel eodem ambitu contineri; quomodo nihil suberit difficultatis, quin eo ferè modo concipiatur hæc penetratio, quo sphæra circa suum axem revoluta, seipsam quasi penetrat; quatenus ejus unæ partes in alterarum locum continuò succedant. E quibus patet, quòd congruentia nil sit aliud quam ejusdem spatii seu loci occupatio & completio, sive simultanea sive successiva; ex qua magnitudinum aliqualis resultat identitas, & in unum coalitio. Nam indivisibiles magnitudines, eò quòd (secundùm id quo indivisibiles sunt) applicantur sibimet invicem, simul idem spatium occupant, & quasi coincidunt; solidæ verò magnitudines omnifariam divisibiles revera per successionem, aut simultaneè per mentalem penetrationem in eodem concipiuntur spatio reponi; cúmque isto spatio, quoad quantitatem unitam & identificatam, ejus interventu uniuntur & identificantur inter se. Sed ut hujus symptomatis indoles magis adhuc eluceſcat, adverto præterea congruentiam (eam præsertim quæ per ἐπίθεσιν facta concipitur) variis modis, & per aliquos quasi gradus intelligi posse peractam. Primo, sic ut totæ simul magnitudines situ partium nullatenus variato spatium idem possideant. Quomodo cunctæ rectæ lineæ, planæ superficies, æqualium circulorum peripheriæ, æqualium sphærarum superficies, similes in æqualibus circulis, cylindris, sphæ- 1.

ris

ris helices, & alia quæcunque perfectiſſimè ſimiles (hoc eſt, ſimiles & æquales) magnitudines congruere poſſunt. Hic ſummus eſt
2. perfectiſſimæ congruentiæ gradus. Secundò, ſic ut ſucceſſive per partes, eidem non immutato partium ſitu, eidem ſpatio coincidant. Quo pacto rectæ lineæ figuræ cujuſlibet perimeter rectæ lineæ in continuum exporrectæ, & priſmatis ſuperficies ſuperficiei planæ in directum poſitæ poteſt adaptari. Qui proximus eſt quaſi gradus poſſibilis con-
3. gruentiæ. Tertiò, ſic ut omnia magnitudinis utriuſque indiviſibilia in eundem locum ſuccedant, útque etiam neutra poſitionem evariet partium. Quâ ratione dum rota vel circulus ſuper rectam lineam ei ſemper contiguam incedit motu progreſſivo, eodémque tempore circa centrum ſuum volutatur, ejus peripheria dictæ rectæ lineæ congruit ; puncta quippe cuncta peripheriæ circularis omnibus rectæ lineæ punctis ordine continuè ſucceſſivo applicantur (quæ ex congruentia, ut hoc obiter moneam, manifeſtè perſpicitur aliquam rectam lineam peripheriæ curvæ circulari adæquari, adeóque circuli tetragoniſmum non eſſe naturâ ſuâ prorſus impoſſibilem ; id quod ſic exprimit ſupradictus acutiſſimus Geometra in Cyclometrico ſuo ; *Talis utique eſt Mechanica circuli cujuſque revolutio, donec ad idem peripheriæ punctum recurrat, unde circumduci occæperat ; quæ illud quidem arguit, & tanquam ob oculos ponit rectam aliquam lineam circuli perimetro revera æqualem exhiberi poſſe.* Parique ratione cùm cylindrus circa ſuum axem rotatus ſupra planam ſuperficiem progreditur, ejus

curva

curva ſuperficies dictæ planæ ſuperficiei exquiſitè congruit. Omnes quippe quæ deinceps in cylindri ſuperficie diſpoſitæ jacent rectæ lineæ parallelæ, parallelis omnibus in plana ſuperficie rectis lineis continuâ indivulsâ ſerie applicantur. Quartò, ſic ut ſimul eundem locum occupent partium unius aliquatenus immutato ſitu, at ordine nihilominus conſervato, retentâque priori ſingularum contiguitate. Quomodo peripheria circuli, vel alia quævis curva, ſic diduci poteſt aut extendi, ut in rectam lineam tranſeat, adeóque rectæ lineæ congruat; & recta linea ſic incurvari poteſt, ut in peripheriam circuli, vel in aliam quancunque curvam degeneret. Paríque modo quævis curva ſuperficies in planam extendi, viciſsímque quævis plana ſuperficies in curvam inflecti poſſit. Et quidem (ut hoc nonnihil ulteriùs explicemus) in multis quomodo fiant è rectis lineis lineæ curvæ, & in quas hæ rectas reſolvantur; nec non è quibus planis oriantur curvæ ſuperficies, ſatis liquidò diſcerni poteſt; id quod curvarum linearum ἕνδυσις, curvarum ſuperficierum πλάτυνσις appelletur. E.g. quoad curvas ſuperficies; ſuperficies curva cylindri nihil eſt aliud quàm parallelogrammum rectangulum, habens baſim æqualem peripheriæ circuli, qui baſis eſt cylindri, eandémque cum cylindro altitudinem; cujus omnes lineæ rectæ baſi parallelæ in circulorum peripherias incurvantur: unde congruet cylindrica ſuperficies huic parallelogrammo, ſi latus aliquod cylindri (hoc eſt, aliqua recta ducta in ejus ſuperficie à baſe ad baſim) ad latus parallelogrammi applicetur, 4.

plicetur, & dehinc tota ſuperficies in planum diſtendatur; aut ſi applicato latere parallelogrammi ad latus aliquod cylindri planum ejus circa cylindrum circumflectatur, ipſámque velut inveſtiat, & contegat undiquaque. Conica ſimiliter ſuperficies nihil eſt aliud, quàm ſectator planus circuli radium habentis æqualem lateri coni, & arcum æqualem peripheriæ circuli, qui baſis eſt coni, cujuſque concentrici arcus in totidem perfectas circulares peripherias intorquentur. Vel potiùs aliter, conica ſuperficies nihil eſt aliud quàm triangulum rectangulum, cujus altitudo vel perpendiculum æquatur lateri coni, baſis peripheriæ circuli, qui baſis eſt coni, cujúſque baſi parallelæ omnes rectæ in totidem peripherias circulares ſinuantur. Sic & curva ſuperficies ſphærica (nec non alia quævis curva ſuperficies figuræ planæ non abſimili rotatu procreata) ad trilineum quoddam planum duabus rectis lineis angulum rectum conſtituentibus, & ſubtensâ linea curvâ comprehenſum facilè redigatur. (Id autem quomodo ſit, non eſt in præſens exponendi locus). At quoad curvas lineas, præter circuli circumferentiam, quæ nil eſt aliud quàm recta linea per omnes ſui partes ubique ſimiliter aut uniformiter inflexa; præter hanc, inquam, ſpiralis cylindrica, quæ reliquarum curvarum omnium eſt ſimpliciſſima, maximè uniformis & ὁμοιομερὴς, nihil eſt aliud quàm recta linea parallelogrammi ſupradicti (ad quod reducitur cylindrica ſuperficies) diagonio æqualis, & circa cylindricam ſuperficiem convoluta. De curvis aliis ad rectas redigendis, aut ad alias diverſi generis

neris curvas, jam conticeo, nè prolixior & simul obscurior sim, in re tantùm ex transcursu attrectata.] Ad hunc verò modum quoque pertinet, aut ei perquam affinis est ejusmodi congruentia, qualis capaces sunt æquales figuræ parallelis iisdem lineis aut planis inclusæ. Quarum omnes lineæ vel omnia plana in iisdem parallelis intercepta sunt æqualia. Ut duo triangula vel parallelogramma, non sibi mutuò æquiangula, vel duæ pyramides (prismata, coni, cylindri) inæqualiter inclinatæ, inter parallelas easdem lineas rectas, vel eadem parallela plana, & super æqualibus basibus constitutæ. Nam ut horum unum alteri congruat, debet situs partium unius ad alterius partium positionem accommodari, ipsarum tamen ordine non perturbato; nec earundem quæ priùs affuit contiguitate deperditâ. Quintus modus est, cùm ita peragi possit ἐφαρμογὴ, sic ut partium quarundam positio varietur & ordo pervertatur. Hic congruentiæ modus omnium imperfectissimus, & apprehensu difficillimus, convenit figuris homogeneis omnino sibi mutuò dissimilibus. Ut v.g. non aliter triangulum circulo, conus sphæræ congruant, quàm alterutrius partes transponendo, partem unius applicando parti alterius, & residui partem in uno parti remanentis in altero, & sic perpetuò, donec exhauriatur negotium, & unius omnes partes tandem alterius partibus evaserint applicatæ, quam rem qui distinctiùs expositam cupit, adeat consulo priùs insinuata Cavallerii loca. Ex his rem attentiùs experienti liquebit quaslibet ejusdem generis magnitudines sibimet in-

invicem, hoc est, lineas lineis, superficies superficiebus, solida solidis aliquo modo, hoc est, vel totas simultaneè, vel per partes (aut per indivisibilia sua) successivè, retento partium situ, vel eo nonnihil laxato, saltem iis transpositis, fieri posse congruentes. Quaslibet, inquam, congruere posse sumendo congruentiam laxiùs, pro coincidentia quavis etiam inadæquata; quomodo minor linea recta, majori lineæ rectæ superimposita congruet ei, hoc est, ei toto, licèt non toti, coincidet. At verò strictiùs accepta congruentia solis tribuitur æqualibus magnis, qui eundem præcisè locum occupant, & nec ejus terminos excedunt uspiam, aut ab iis deficiunt, sed justè complent ipsum, & ipso coercentur. Et quidem in aptitudine vel [illegible] sic congruendi, quæ subinde prædictæ sunt magnitudines, nonnulli formalem constituunt ipsius æqualitatis rationem, & ipsam ex ea definiunt, equidem meâ sententiâ non malè. Ex antiquis magnus Apollonius in ea mente fuit, ut patet ex ea quam Proclus adducit & impugnat, demonstratione celebris pronunciati, quæ eidem æqualia. Quæ demonstratio scil. innititur huic æqualitatis definitioni, Τὰ τῇ αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα ἐστὶν· & nuper D. Hobbius nostras æqualia corpora definivit, quæ eundem locum possidere possunt; *Potest autem* (ait) *corpus aliquod locum occupare eundem, quem aliud corpus occupat, quamvis non sint ejusdem figuræ, si modò flexione & transpositione partium in eandem figuram redigi intelligatur.* Quæ ab Hobbio tradita vehementer exagitat, & perquam acutè refellere conatur ejus egregius

gius Elenctes; at me judice, nè verum dissimulem, haud penitissima cum efficacia. Nihilominus enim Apollonianæ sententiæ animo propiùs accedo, & æqualitatem ex possibili congruentia commodissimè puto definiri. Quamobrem ita sentiam, (quoniam id πρᾶγμα videtur, & ad res nostras aliquid faciat) adjungam non nullas rationes, neq; gravabor hanc rem aliquando curatiùs examinare. Id quod gradatim progrediendo satagam. Et primò quidem cùm subdubitari possit an ullam expediat æqualitatis definitionem assignare, miniméque necessarium id existimare videatur Aristoteles, ὃ πάνυ, propter æqualitatis ex se satìs perspicuam notionem, & significatum nemini non abundè perspectum; (Τὰ πάθη, inquit Philosophus, μὴ λαμβάνει τῇ σημαίνει, ἂν ἄλλον, ὥσπερ οὐδὲ τὰ κοινὰ ἃ λαμβάνει τῇ σημαίνει, τὸ ἴσα ἀπὸ ἴσων ἀφελεῖν ὅτι γνώριμον· hoc est, *Affectiones non assumit* (id est, non explicitè docet aut exponit) *quid significent, ut neque communia* (id est, communium sententiarum vel axiomatum termini) *quid significent assumit* (aut explicat); *ut quid significet æqualia æqualibus subducere, quoniam id manifestum est*, & vulgò satìs exploratum. Cùm, inquam, sic ambigi possit an debeat æqualitas omnino definiri, ego nihilominus rei Mathematicæ conducere reor, ut definiatur & explicetur distincte quid per eam veniat intelligendum. Nam quum æqualitas sit ejusmodi symptoma, quod immediatè sensum non incurrit, nec experientiæ subjacet, at ex rerum instituta comparatione resultat (absque comparatione saltem à nobis non deprehenditur)

Post. l. 10.

ditur) & cùm res diversimodè possint inter se comparari, ideo requiri videtur, ut ex qua qualique comparatione, quando & quomodo resultare concipiamus æqualitatem, per certum aliquod argumentum, indubitatum κριτήριον, adnexum signum evidens & reciprocum definitione expressum determinemus; sic ut ejus insit nobis distincta notio, nec ulla possit emergere dubitandi vel dissentiendi causa. Nos quidem immediatiùs & frequentiùs expositæ sensibus (nam obiter illorum nihil moror sententiam, qui æqualitatis, similitudinis, & ejusmodi relationum ingenitas nobis à natura species arbitrantur;) quando commentum illud, ut jam antea vidimus, haud sit necessarium, & minus idoneum scientiis, nec ullà, quod ego percipiam, præter Metaphysicas quasdam vocabulorum perplexitates & argutiolas, solidâ ratione subnixum, res, inquam, immediatiùs objectatæ sensibus) è qualibus constant primæ indemonstrabiles hypotheses non opus est, ut aliis, præter vulgò recepta sua nomina, verbis explicentur, quoniam easdem omnino cunctis hominibus sui ipsarum distinctas idæas ingerunt insculpúntque. At ex primis istis inter se comparatis, vel utcunque resultantes alios conceptus secundarios, quo præcidatur omnis occasio discrepandi, ex scientiarum usu videtur, primas istas è quibus oriuntur hypotheses allegando, quàm accuratè determinare. Rigidéque rem taxando, in scientia qualibet è primis fundamentis extruenda, ferè nullum adhibere licet vocabulum non antea definitum, aut saltem cui respondentem in natura rem non possimus exerto di-

digito commonſtrare. Quod eò magis in hoc, quod præ manibus habemus, magnitudinis ſymptomate debet obtinere, quoniam præcipuas fert partes, & ferè ſemper intervenit in omni materia, diſcurſúque Mathematico, adeóque multum referat ut unam omnes harum ſcientiarum ſtudioſi conſonam & communem ejus idæam, claram, diſtinctam, rationi conſentaneam habeant, nec ut eam confusè vel diſcorditer apprehendant. Quinimo quòd jam quid ſit æqualitas, in quo conſiſtat ejus formalis ratio, quomodo definiri debeat, ipſi jam quærimus & diſceptamus; argumento ſit illam definiri debere. Addo, quòd mihi ſaltem incumbat hoc ſuſtinere, quoniam axiomata cuncta pro theorematis habeo, quæ poſſunt, & debent, ſi res exigat, demonſtrari; ídque præſertim ex definitionibus terminorum, è quibus conſtant; unde quo veritas conſtet illorum axiomatum: quæ eidem æqualia ſunt; ſi æqualibus æqualia ſubtrahantur aut apponantur; & conſimilium, innoteſcere debet, & in promptu haberi æqualitatis definitio. Addo propter hujuſce definitionis defectum fieri poſſe, quinimo fortaſſe de facto contigiſſe (nonnullum in hujuſce ſcientiæ dedecus & detrimentum) ut in maximè tranquilla atque pacifica Geometriæ provincia contentiones & turbæ viguerint, incaluerint iræ, clamores & convitia ſtrepuerint. Undenam enim quæ Clavium inter & Peletarium, nec non inter alios Geometriæ ſtudioſos atque peritos, de angulo contingentiæ, infenſis animis, & verbis contumeliæ non expertibus, agitata lis exerſit, niſi quòd æqualitatis

& anguli definitiones non ritè fuerint conſtitutæ; nec vocabulorum iſtorum ambiguitas penitùs eſt ſublata; rixas iſtas una fortè vel altera commoda definitio facile ſedáſſet, decidiſſet, ſuſtuliſſet. Expedit igitur definitionem aliquam æqualitatis præterni. Hoc teneatur imprimis. Porro, Secundò, quoniam, ut antehac ſæpe diximus, & nobis habemus perſuaſiſſimum, unaquæque definitio peti debet ex aliqua ſuppoſitione poſſibili per experientiam manifeſtè compertam; & cùm ſi agnatas huic negotio quàm attentè perluſtremus & excutiamus univerſas, nulla ſe præbitura ſit opinor hâc poſſibili magnitudinum congruentiâ commodior æqualitatis definitioni fundandæ hypotheſis: ergò hanc amplecti decet & agnoſcere. Quòd nulla commodior objiciat ſe, compluribus attendenti liquebit indiciis. Nam nulla frequentiùs obſervatur, & ſenſibus exponitur, oculis conſpicitur, manibus attrectatur; nulla clariùs intelligitur, aut poſſibilior exiſtimatur. Et quum de rerum æqualitate (vel inæqualitate) vertitur quæſtio, ſemper ei dijudicandæ liti ad congruentiam accurritur & appellatur. Id quod ſignum ſit ſatis evidens hanc æqualitatis notionem communibus hominum conceptibus aprimè conſentire; quódque nil aliud intelligunt homines, quum duas magnitudines æquari dicunt, quàm eas ſibimet applicatas inter ſe congruere, vel ejuſdem ſaltem ſpatii capacitatem adimplere. Quod & adhuc experimento mihi bene familiari dabo confirmatum. Sæpe rogatus ſum à Geometriæ non admodum aſſuetis quid ſibi velit, aut quid

quid ſignificet illud de circuli tetragoniſmo famigeratum problema. Reſpondere mihi fuit in promptu, figuram inquiri planam rectilineam quadrilateram rectangulam æquilateram, cujus area vel ſpatium lineari perimetro incluſum, propoſito circulo (hoc eſt, areæ planæ circulari peripheriâ circumſcriptæ) ſit acuratiſſimè æqualis. At quid, inſtare ſolebant, per æqualitatem illam intelligis? Quomodo enim ſpatium cirulare rotundum angulari ſpatio poſſit æquari; cùm illa congruere nequeant, & ſibimet adaptari? Cui dubitationi ſatis equidem ſubindicanti hominum plerorumque, nil aliud per æqualitatem quàm ipſiſſimam magnitudinum congruentiam intelligere vel denotare) tum demum facilè ſatis iri facturum comperio. Si dicam modò reperta dicta figura quadrilatera quaſi cerea foret (hoc eſt, è materia molli penitúſque flexili conſtaret) partium quarundum inflectione, tranſpoſitione, vel compreſſione quomodocunque circularem in figuram transformetur, circulóque tunc appoſita congruat exactè, figuras iſtas æquales evadere, peractúmque fore quem tanto ſtudio indagamus tetragoniſmum. Huic reſponſo ſuam ad præconceptam notionē de induſtria accommodato continenter acquieſcunt; undeſatis liqueat homines per æqualitatem nil aliud intelligere vel ſignificare, præter poſſibilem congruentiam. Accedat huc tertiò quæſtionis hujus ut mihi videtur peremptorium argumentum, ex eo ſymptomate, cui innituntur, à quo deducuntur, ad quod ultimò referuntur omnia circa magnitudinum æqualitatem theoremata (à quo proinde reliquæ

liquæ magnitudinum æqualium ceu talium affectiones derivantur) ex ejuſmodi dico ſymptomate commodiſſimè definitur æqualitas. Atqui congruentiæ innituntur, ab ea deducuntur, per eam demonſtrantur (immediatè ſcilicet aut mediatè) in eam demum ultimò reſolvuntur omnia circa magnitudinum æqualitatem demonſtrata. Per eam igitur commodiſſimè definiatur æqualitas. Majoris in iſthoc ſyllogiſmo propoſitionis veritas è definitionis natura ſatis eluceſcit; cujus officium eſt ut ſymptoma quoddam primarium exhibeat, ex qua, tanquam formali cauſa, reliquæ definiti paſſiones per legitimum diſcurſum inferantur. Igitur ſi magnitudines æquales definiantur, quæ ſibimet invicem præcisè congruere poſſunt, & ex hoc expreſſo ſymptomate magnitudinum æqualium quà talium affectiones demonſtrari poſſunt, ſatis conſtabit indè definitionem iſtam eſſe legitimam. Atqui res iſto modo ſe habet, & minor æquè vera eſt. Nam de facto quicquid in Elementis (adeóque quicquid uſpiam alibi in Mathematicis) circa rerum æqualitatem demonſtratur, ab iſto axiomate, Quæ congruunt ſunt æqualia, dependet, ut aliquatenùs hujus lectionis initio commonſtratum eſt, & poſthac fortaſſe clariùs oſtendemus. Quod axioma proinde qui pro æqualitatis definitione poſitum accipiunt, rectiſſimè facere videntur, quibus (præter memoratos Apollonium & Hobbium) doctiſſimum accenſere potero Borellium. *Nam,* inquit is, *ſi nomen æqualitatis non eſſet adhuc impoſitum, dici poſſet, Quæ ſibi mutuò congruunt dicentur æqualia, & hæc eſſet definitio, non pro-*

Euclid. Reſtit. p. 16.

nunciatum.

nunciatum; non igitur aliter differre putat hoc pronunciatum ab æqualitatis definitione quàm efferendi modo; & posse concedit ipsam in definitionem facile transmutari. Quod innuit verò propter nomen æqualitatis priùs impositum, & vulgò receptum id axiomatis potiùs quàm definitionis vicem subire, non in eo viro doctissimo prorsus assentio. Nam etsi rerum quarumvis, trianguli videlicet aut circuli, recepta nomina sint, & communiter usurpata, tamen expedit ista nomina definiri, ad excludendos nempe confusos de rebus istis & vocabulis conceptus. Vulgus enim, ut in diverbio fertur, non distinguit, & idæas sæpiùs fovet, nominibus usitatis respondentes admodum confusas & inadæquatas; scientiarum verò genius & ratio distinctos admodum & adæquatos conceptus postulant; adeóque vel receptissima nomina rerum, (sensibus præcipuè non obversantium, & sui clarissimas idæas non imprimentium) scientiarum magistri definire debent, & vocabulorum significatus à vulgari confusione compurgare. Quanquam nec aliter receptum est æqualitatis nomen, quàm ut designet id, quod dicto pronunciato exprimitur, magnitudines nempe quæ dicuntur æquales, inter se congruere. Continet igitur illud axioma definitionem æqualitatis, etiam vulgaribus idæis bene contentaneam. His adjiciatur quartò, quòd nullam adversarii magis idoneam comminisci possint æqualitatis notionem, neque per eam, hac exclusa ratione quid velint aut distinctè intelligant, commodè queant interpretari. Argumento sint quas Hobbio suggerit antago-

niſta ſuus alias duas ejus deſcriptiones, ut ipſe credit, magis appoſitas illâ, quæ ex congruentia deſumitur. Hobbium hiſce totidem verbis ſcitatur; *Annon ſimul & ſemel dixiſſe poſſes, id alteri æquale eſt quod tantundem eſt atque ipſum: vel æqualia ſunt quorum eadem eſt quantitas; vel ſi neutra horum placeat, ſaltem aliam definitionem inveniſſe?* Ad quæ verba licet advertere primò, quòd veriſimile ſit acutiſſimum illum virum nullam excogitare potuiſſe definitionem accuratiorem illis, quas adducit, duabus (nec enim ſiquæ ſuccurriſſent, illas omiſiſſet); atqui hæ duæ, vel nihil omnino ſignificare videntur. Aut in congruentiam recidere. Illam imprimis (quæ ab Ariſtotele mutuò videri poteſt accepta, cujus eſt ἴσα ὧν τὸ ποσὸν ἕν) æqualia *Met. IV.* 15 ſunt, quorum eadem eſt quantitas non improbo, ſed pronè amplector, ſi per eam ſaltem denotetur non actualis ſed poſſibilis identitas quantitatis (ut ſanè debet intelligi, nè manifeſtæ falſitatis convincatur ipſa enunciatio tribuens eandem rebus æqualibus, hoc eſt, rebus actu diverſis, quantitatem). Sic, inquam, intellectam definitionem illam non reprehendo, ſed interrogo quomodo poſſit eadem evadere duarum rerum quantitas aliter quàm per congruentiam; niſi per applicationem, aio, vel mentalem penetrationem; aut ejuſdem medii ſpatii interventu coincidant, & quaſi coadunentur ſibimet invicem, aliquo modo ſuperiùs expoſito; aliter, inquam, quomodo poſſint duarum rerum à ſe revera diſtinctarum identificari quantitates, vix equidem video vel capio. Quod alteram verò ſpectat definitionem, id al-

alteri æquale est, quod tantundem est atque ipsum; ei primò legem oppono Dialecticam ab Aristotele summa cum ratione præscriptam; Ἀεὶ ὁ ὁρ⊖ ἀποδιδοὺς τὸ γνωρίζειν χάριν τοῦ λέγειν· γνωρίζομεν γὰρ οὐκ ἐκ τῶν τυχόντων, ἀλλ' ἐκ τῶν πρώτων, καὶ γνωριμωτέρων. Φανερὸν (ἓν) ὅτι ὁ μὴ διὰ τούτων ὁριζόμεν⊖, οὐχ ὥρισται· (hoc est, *Cùm definitio tradatur rei declarandæ causâ, declaremus autem non ex quibusvis (temerè arreptis) sed ex prioribus & manifestioribus; unde constat illum, qui non è talibus definit, haud quaquam definire).* Hanc, inquam, justissimam legem objicio citatæ definitioni, quis enim non æquâ saltem facilitate concipiat quid sit æquale alteri, ac quid sit tantundem atq; ipsum? At verò penitiùs attendenti vocabulum tantundem nil forte comperietur aliud designare quàm tantum idem, vel idem in quantitate, vel cujus eadem est quantitas; adeóque hæc descriptio nullatenus à præcedente distabit, & pariter relabetur in nostram congruentiæ hypothesin, si rectè percipiatur & enucleetur; adeò nostram sententiam adversarii, nec opinantes, dum evertere student, coguntur stabilire, suóque satis ipsorum indicio produnt se vix, ut maximè velint, à nostro conceptu revera dissidere. Prætereo denique quod Euclides æquales magnitudines expressè perhibeatur definivisse, quæ replent eundem locum; in libello de gravi & levi, mihi nunquam viso, sed quem auctor mihi Ramus est alicubi prostare. Cæterum major huic causæ (major, inquam, naturæ cum congruentiæ tum æqualitatis) lux affulgebit, ex illorum, quæ tum à Proclo, tum à dicto eruditissimo viro

Topic. VI. 4

Schol. Mathem. VII. p. 163.

viro producuntur in contrariam partem, argumentorum, equidem haud diffiteor satis in speciem validorum, discussione; à qua tamen omnino, ne prolixior sim, in præsens abstinebo.

LECT. IV.

EMagnitudinum communioribus affectionibus & symptomatis observationi subjectis, & Mathematicas ingredientibus hypotheses, novissimè se tractandam exhibuit congruentia, quâ suppositâ resultare, & ab ea commodè definiri magnitudinum æqualitatem in præcedenti quadantenus astruximus lectione. Quam tamen doctrinam acriter & animosè, invictis ut ipsi putant argumentis, impetunt Proclus, & Hobbii præclarus antagonistes in Elencho suo Geometriæ Hobbianæ. Sed an penitus debellatum sit, & opinioni suæ parem, hoc est integram, ipsi victoriam reportârint, superest jam & nobis incumbit, objectorum efficaciam ad rationis trutinam exigendo pensitare. Id quod eo promptiùs aggredimur pertentare, quoniam ex hoc adversantium sententiarum atque discursuum conflictu non exigua rebus istis lux. Neutiquam aspernandæ quædam veritatis scintillæ extundi posse videantur; nec tamen omnibus extricandis captiunculis anxiè desudabo, sed quæ candidè accepta rem propiùs attingere, vis aliquid in se momentíque gravioris continere, videntur argumenta

gumenta curatiùs excutiam; memor divini quod apud Aristotelem habetur præcepti; (Ἅμα δὲ καὶ μᾶλλον ἂν εἴη πιστὰ τὰ μέλλοντα λεχθήσεσθαι προακηκοόσι τὰ τῶν ἀμφισβητούντων λόγων δικαιώματα· τὸ γὰρ ἐρήμην καταδικάζεσθαι δοκεῖν ἧττον ἂν ἡμῖν ὑπάρχοι· καὶ γὰρ δεῖ διαιτητὰς, ἀλλ' οὐκ ἀντιδίκους ἔτι τοὺς μέλλοντας τἀληθὲς κρίνειν ἱκανῶς). Proponam igitur argumenta, non illa quidem delumbata, sed quoad potero nervosiùs astricta. Primò debet, obtendunt, æqualitatis eadem univoca ratio communis, & notio generalis assignari, pro rebus iis universis, quibus vere tribuitur, & justè convenit æqualitas. Atqui non solis magnitudinibus (quibus nimirum peculiaris est ista, pro qua nos certamus, congruentia) sed quantis etiam omnibus homogeneis, aptisque natis inter se comparari (puta motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus, numeris) æquo jure, pari ratione, simili loquendi proprietate tribui solet, & verè convenit æqualitas, etsi nulla ratione quadret aut congruat eis ἐφάρμοσις· (Τὸ γὰρ ἴσον καὶ ἄνισον, καὶ τὸ ὅλον καὶ τὸ μέρος, καὶ τὸ μεῖζον, καὶ τὸ ἔλαττον κοινὰ, καὶ τῶν διηρημένων ἐστὶ ποσῶν καὶ τῶν συνεχῶν· i.e. communiter omnibus quantis continuis atque discretis convenit æqualitas, ait Proclus. Et alter adversarius; *Annon eadem est æqualitatis notio in his omnibus, imò & in rebus aliis omnibus, quotquot æqualitatis aut inæqualitatis sunt capaces?* Quò facit quòd quam circa æqualitatem versantur axiomata, Geometricis elementis præstrata, quantis indifferenter omnibus accommodari solent, & jure possunt, unde vocantur ἀξιώματα κοινὰ. Οὐ μόνον λέ-

De Cœlo l. 10.

Elench. p. 10.

λέγεται μεγέθεσιν ἀληθεύειν τούτων ἕκαστον, ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῖς, καὶ κινήσεσι, καὶ χρόνοις, iterum ait Proclus. Eique suffragium fert ipse
Met. XI. 4. Philosophus; Ὅτι γὰρ (inquit, exemplum afferens principii communis) ἀπὸ τῶν ἴσων ἀφαιρεθέντων ἴσα τὰ λειπόμενα, κοινὸν μὲν ἐστι πάντων τῶν ποσῶν). Igitur à congruentia (solis quippe magnitudinibus propriâ, nec aliis quantis competente, adeóque neutiquam æqualitati coëxtensâ, sed multò strictioribus cancellis coarctatâ) perperam desumi asseritur æqualitatis ratio. Debet enim ex Logicæ justissimo præscripto, definita res attributo suo, per quod definitur, exactissimè coæquari; cum ea reciprocari & converti. Huic exceptioni primariæ, satis ut non nemini videatur presse nos urgenti, repono summatim primò, quod hîc sola magnitudinum æqualitas propriè atque præcipuè definitur. Secundò, quòd non injuriâ nec abs ratione sola definiatur. Tertiò, quòd hæc definitio (e congruentia dico petita definitio) suo modo, quantúmque satis est, omnibus quantis adaptari possit. Denique quartò, quòd expediat, saltem liceat, majoris perspicuitatis atque securitatis causâ, ut reliquorum quantorum æqualitates seorsim definiantur. Quibus distinctiùs expositis, & sufficienter apud æquos rerum arbitros approbatis, satìs opinor factum erit allatæ objectioni. Quod primum punctum attinet, in eo nulla versatur controversia; nam solas magnitudines congruentiæ præsertim capaces esse non diffitentur adversarii, quin obtendunt potiùs, & in eo collocant vim argumenti sui; satísque liquet ex se, cùm locum

cum implere, ſpatium occupare, contingere ſe mutuò, ſibimet applicari, ſe quodammodo penetrare, magnitudinibus proprium & peculiare ſit attributum. Ergò ſolis illis hæc definitio, ſiquidem definitio, propriè competit & quadrat. Verùm ſecundò, non iniquè dico magnitudinum æqualitatem per ſe ſolam proprie definiri. Nam cum illis primariò & propriè conveniant quantitas & quantitatem conſequentes, vel concomitantes affectiones (extenſio, terminatio, compoſitio, diviſio, menſuratio, reliquæque) quidni primariò conveniat illis æqualitas, & proinde ex reſpectu ad ipſas propriè definiatur? Docet nos Philoſophus generis definitionem præcipuæ ſpeciei τῷ πρὸς ἕν, primùm & proprie convenire, reliquis ſecundario, conſequenter & per ſimilitudinem; Τὸ τί ἐστιν ὑπάρχει πᾶσιν, ἀλλ' οὐχ ὁμοίως, ἀλλὰ τῷ μὲν πρώτως, τῷ δ' ἑπομένως· (*Ratio rei convenit omnibus, at non eodem pacto, ſed huic primò, illis conſecutivè*) καὶ ὁ ἁπλῶς ὁρισμὸς τῶν ἄλλων ὁμοίως ἐστὶ, πλὴν ὁ πρώτως. Simpliciter accepta definitio τῷ πρώτῳ δεκτικῷ proprie convenit; ergò reſpectu ejus definitio condi debet. Annon autem alia quanta quævis ex reſpectu ad magnitudines tanta quanta ſunt nedum æſtimantur & dignoſcuntur, ſed etiam dicuntur atque denominantur? Ipſa vocabula majoris & minoris, totius & partis, finiti & infiniti, continui, diſcreti, extenſi, contracti, ſymmetri, aſymmetri, reliquaque talia, quæ toties aliis aſcribuntur quantis, num aliunde quàm à magnitudinibus originem trahunt, & ab iis ad alia ſecundariò transferuntur? Nec id con- *Met. VII. 4.*

contingenter aut immeritò, ſed neceſſitate quadam & ſumma cum ratione. Nam gradus certè quoſdam, τάσεις & ἐπιτάσεις, intenſiones & remiſſiones ſuas habent aliæ res, ex accidente Mathematicæ conſiderationi ſubjecta, at quæ nullo modo comprehendere vel exprimere poſſumus, niſi per magnitudinum aliquarum (quibus inſunt, in quas agunt, quas producunt, circa quas quomodocunque verſantur) inſtitutam collationem, & adhibendo vocabula mutuatitia de magnitudinum attributis tranſducta. Ut inſtemus, quomodo pondus aliquod aut momentum rei gravitantis concipiatur, aut quare dicatur tantum, ita magnum aut parvum, niſi quatenus inest tanto corpori, vel quod tantum corpus attollere, tantam magnitudinem valet ſuſtinere? Quomodo diviſibile, vel totum intelligatur, niſi corpus cui inhæret, aut quod reſpicit partes habeat ſingulas ejuſmodi virtute præditas, illive potentiæ reſpondentes? Unde finiti titulum adipiſcitur, niſi vel ex terminis illi ſubſtratæ magnitudinis, aut ſaltem ex finibus illius eatenus extenſi corporis, quod evehere poteſt aut ſuſtentare? Commenſurabile pariter & incommenſurabile prædicetur ex eo, quòd aut ſubjectum ſuum aut objectum, ſymmetriâ vel aſymmetriâ verſus alias quibuſcum comparatur magnitudines, itidem pondere ſimiliter donatas, affecta comperiuntur. Sic & motus ex ſpatii quod permeatur magnitudine tantus (longus, brevis; magnus, parvus; ſeu abſolutè ſeu comparatè) è ſpatii limitibus eouſque protenſus, ibíque terminatus, ex ejus dimenſionibus menſurabilis, ex

ejus

ejus compoſitione totus, è diviſibilitate partibilis habetur & dicitur. Haud abſimiliter (nam exempla nonnunquam undicunque conquiſita coacervo (plura certè quàm quæ dilucidandæ rei propoſitæ requiſita cenſeam ipſe) libenter & datâ operâ conſulens harum rerum minùs aſſuetarum utilitati, ut nempe γεῦμα quoddam præparatorium univerſæ Matheſeôs obiter & ſenſim inſtillem ipſis, ac profuturos aliquando conceptus aliud agens inſinuem) haud, inquam, aliter tempus ex ſpatii ab aliquo determinato mobili, Sole nempe vel Lunâ, peragrati magnitudine concipitur & appellatur; neque non terminos, extenſionem, ſymmetriam, aliaſque ſuas paſſiones ex illo, quem ad ejuſdem magnitudinem obtinet, reſpectu mutuatur. Velocitas etiam ex ſpatii percurſi magnitudine (non quidem abſolutâ, ſed comparatâ cum magnitudinis ſpatii ab alio determinato mobili, Sole videlicet aut Lunâ tranſacti, hoc eſt, ex magnitudine ſpatii tanto tempore peracti) taxatur; parilíque ex relatione ad ſpatii magnitudinem limitari, componi, dividi, ad menſuram exigi; quomodocunque comparari ſolet, neque vix aliter poteſt æſtimari. Numeri rerò quòd non alia ratione quàm ut ſymbola magnitudines deſignantia quantitatis participes ſunt & proportionis, abundè jam antehac dictum & oſtenſum eſt nobis. Nec omnino ſolus, & authoritatis omnimodæ ſuffragio deſtitutus hæc affirmo (quamvis non raro quas pertractandas ſuſcipio quæſtiones, & materias diſtinctè quod ſciam explicuerit nemo, ſolámque quod ille dixit Libera pervacuum veſtigia ponere—

nullo

nullo ferè viæ duce vel comite, qui moleſti per haſce ſalebras itineris tædium conſoletur, quò magis condonandum ſit, ſi nonnunquam ceſpitare videar, aut impeditiùs procedere, ac) ſaltem in hac re principem habere videor aſtipulantem & præcinentem mihi Philoſophum, cujus hæc imprimis alicubi leguntur verba, noſtram in rem ſatis luculenta; Ἐπεὶ δ' τὸ κινούμενον κινεῖ ἔκ τινος εἴς τι, καὶ πᾶν μέγεθος συνεχὲς ἀκολουθεῖ τῷ μεγέθει ἡ κίνησις· διὰ γὰρ τὸ μέγεθος ἦν συνεχὲς καὶ ἡ κίνησίς ἐστι συνεχὴς, διὰ δὲ τὴν κίνησιν καὶ ὁ χρόνος· ὅσον γὰρ ἡ κίνησις τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος εἶναι δοκεῖ γεγονέναι· τὸ δὲ πρότερον καὶ ὕστερον ἐν τόπῳ πρῶτον ἔστιν· ἐν τούτοις δὲ μάλιστα τῇ θέσει. Ἐπεὶ δ' ἐν τῷ μεγέθει ἔστι τὸ πρότερον καὶ τὸ ὕστερον, ἀνάγκη καὶ ἐν κινήσει εἶναι τὸ πρότερον καὶ τὸ ὕστερον ἀναλογον τοῖς ἐκεῖ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἐν τῷ χρόνῳ ἐστὶ τὸ πρότερον καὶ ὕστερον διὰ τὸ ἀκολουθεῖν ἀεὶ θατέρῳ θάτερον αὐτῶν· hoc eſt, expliciatiùs aliquanto; *Cùm quicquid movetur ab alio termino ad aliquem terminum promoveatur, & omnis magnitudo continua ſit, magnitudinem eatenus conſequitur motus. Ob magnitudinis quippe continuitatem continuus eſt motus, & propter motum tempus quoque continuum eſt. Quantus enim exitit motus, tantum quoque tempus perpetuò videtur affluxiſſe. Prius autem & poſterius ſpatio primitus inſunt, ex diverſa partium ejus poſitione: cúmque magnitudini inſit partium ordo, motui quoque neceſſariò inerit, analogicè reſpondens illi. Quinetiam in tempore reperitur prius & poſterius, quia ſemper eorum alterum alteri conſequens eſt* (quoad hujuſmodi nempe paſſiones & attributa). Ita ſatis clarè motûs ac temporis continuitatem

Phyſ. IV. 86.

ſimul

simul & quantitatem magnitudinis ἐμφανόμων statuit consectarias & derivatas. Idem rursus alibi: Ἀκολουθεῖ τῷ μεγέθει ἡ κίνησις, τῇ δὲ κινήσει ὁ χρόνος διὰ τὸ καὶ ποσὰ καὶ συνεχῆ καὶ διαιρετὰ εἶναι. διὰ μὲν οὖν τὸ μέγεθος τοιοῦτον, ἡ κίνησις ταύτα πέπονθε· διὰ δὲ τοῦτο κινεῖσθαι ὁ χρόνος. *Phys. IV. 18.* hoc est, *Magnitudinem sectatur motus, motus verò tempus, quatenus hæc quanta sunt, & continua, & divisibilia. Quia nam magnitudo talis est, ideo taliter affectus est motus, & propter motum tempus.* Ita Philosophus in Physicis, ut vix potuerit ad rem nostram magis appositè, vel pleniùs & liquidiùs pronunciâsse; nisi fortè quæ tradit in Metaphysicis etiam his expressiora sint, ac magis nostram corroberent, illustréntque sententiam. Nam de motu & tempore ita proloquitur; Καὶ γὰρ ταῦτα ποσὰ ἁπλῶς λέγεται, καὶ συνεχῆ τῷ ἐκεῖνα διαιρετὰ εἶναι, ὧν ἐστι ταῦτα πάθη· λέγω δὲ τὸ κινούμενον, ἀλλ' ᾧ ἐκινήθη· τῷ γὰρ ποσόν εἶναι ἐκεῖνο, καὶ ἡ κίνησις ποσή, ὁ δὲ χρόνος τῷ ταύτην. *Met. IV. 13.* hoc est, *Motus & tempus aliquo modo quanta dicuntur & continua, propterea quòd illa, quorum affectiones sunt (vel quibus accidunt) divisionis sunt capacia. Intelligo autem pro subjecto ipsorum non ipsum mobile, sed juxta quod movetur (hoc est, spatium transactum) non eò quòd illud est quantum, etiam motus est quantus, & propter hoc tempus.* Ita nobis suffragium suum & patrocinium præstat Philosophus. Æquum igitur est, quum alia quanta suam magnitudini quantitatem (ejus saltem notitiam & comprehensionem) ac quantitati connexas affectiones referant acceptas, ut eorundem etiam æqualitas (hoc est, quantitatis velut identitas & coalitio)

ex magnitudinis æqualitate censeatur: utque per analogiam & secundario quanta sunt, sic analogicam & tralatitiam quoque sortiantur æqualitatem. Id quod à veritate non abludere rem ipsam immediatiùs & intimiùs exploranti, communemque sensum & consensum hominum consulenti manifestiùs apparebit. Nam v.g. si quem mortalium (seu Philosophum, seu e vulgo quempiam) sciscitetur aliquis quid intelligat, quum dicit æquari duo tempora, nihil hæsitans, opinor, statim respondebit, intelligere se duo æqualia spatia ab eodem uniformiter lato mobili (saltem à diversis æquâ velocitate latis) peragi; Solem nempe suæ diurnæ vel annuæ revolutionis æquales partes absolvisse. Si quid significet per duorum ponderum æqualitatem, quòd extrema, dicet, vis hujus magnitudinem aliquam elevare vel sustinere queat æqualem (ejusdem speciei) magnitudini, quam extrema vis alterius elevare poterit aut sustinere; nec aliter de motuum ac velocitatum, & aliorum, quæcunque sunt, quantorum æqualitate consulti statuent, aliquam semper magnitudinem quarundam æqualitatem allegando, cujus respectu dicta quanta constituantur ac denominantur æqualia. Scilicet à magnitudinis æqualitate reliquorum æqualitatem vix mente quisquam secernere potest, aut penitus abstrahere; vix illâ seclusâ quod sint æqualia deprehendere vel agnoscere; quomodo sint æqualia mente cogitare, vel verbis exprimere; quid ipsa denuo sit æqualitas distinctè concipere valent. Illam igitur cum alia quævis æqualitas intimè connotet & involvat ut naturâ pri-

priorem & sibi præstratam, constitutivam, & definitivam sui; non igitur nisi minùs principaliter & secundariò, dependenter & consecutivè, derivativè & per participationem, κατ' σχέσιν aut κατ' ἀναλογίαν, æqualia sunt alia quanta. Unde quò de reliquorum æqualitate clarior apprehensio sit, & certiùs fiat judicium, magnitudinum æqualitas quid significet, in quo consistat, præcognosci, distinctéque comprehendi, adeóque jure merito per se priùs definiri debet. Id quod secundò suscepimus explicandum & ostendendum. Verùm porro, tertiò, quantis etiam aliis quibuscunque quodammodo convenit ἐφάρμοσις nostra, prout inquam (utì jam ante satìs declaratum) aliquo modo terminantur, extenduntur, componuntur, dividuntur, mensurantur, alias magnitudinum affectiones admittunt, suo modo, sic & aliquo modo congruentiam vendicant sibi (mediante præsertim magnitudinum quibus insunt, quas respiciunt congruentiâ) concipiatur enim, exempli causâ, duabus in rectis lineis, vel in duabus æqualium circulorum peripheriis æquâ velocitate deferri mobilia duo puncta (vel alia quævis æqualia & similia duo mobilia) intelligatur etiam lineas istas aut peripherias, utique congruentiæ capaces, sibimet applicari, sic ut dicta quoque puncta vel mobilia sibimet apponantur, adeóque sibi congruunt tum ab initio, tum in progressu sui motûs (quod eveniet ob suppositam motûs æqualem celeritatem) inde congruentibus perpetuò mobilibus, & ipsorum orbitis coincidentibus, haud difficile concipitur ipsos motus ἐφαρμόζειν, uniri, coalescere, adeóque

eandem quantitatem habere, seu sibimet adæquari. Item si in curriculo corporis alicujus (puta Solis aut Terræ) cujus æquabili motu determinatur temporis quantitas, adsumpta concipiantur duo puncta ceu termini, de quibus motuum, adeoque tempore, decurrentium initia computentur, istique termini sibi concipiantur adponi, sic ut exinde (modo mox exposito) duo motus ab iis auspicantes congruant invicem, etiam ipsa tempora simul confluent, & in unum commigrabunt. Neque si confingatur animo duorum annorum initia conjungi, difficile sit ut parili tenore procedentes illi simul existant, se quasi penetrent, in unum coëant imaginari. Quod perinde est ac si diceres, duo æqualia tempora si simul incepissent, una desiissent. Quinimo qua ratione tempus tempori quodammodo congruum revera sit, hinc quoque licebit judicare. Cùm tempus ejusdem nobilissimi constantissimique mobilis æquabili circulari motu sæpiùs iterato mensuretur & determinetur optimè (sicuti notat Aristoteles; Ἡ κυκλοφορία (inquit) ἡ ὁμαλὴ μέτρον μάλιστα, ὅτι ὁ ἀριθμὸς ταύτης γνωριμώτατος) circulus autem ille, periodico mobilis ejusdem recursu toties emensus, semper unus idemque perfiatur, hinc illo conciliante mediantéque, motus & tempus (nec non motuum temporúmque partes ab eodem illius peripheriæ puncto capientes exordium, & in idem punctum desinentes) velut uniuntur & identificantur inter se, adeoque congruunt perfectissimè. Quamobrem annus in se verti, redire menses, instaurari secula, lapsas tempestatum vices atque perio-

Phys. IV. 20.

dos

dos restitui, eosdem denique temporum circuitus iteratò obiri mense censetur, & sermone teritur vulgi (καὶ γὰρ ὁ χρόνος αὐτὸς εἶναι δοκεῖ κύκλός τις, *Tempus ipsum videtur esse cyclus quis* (aut circulus) ob motum quo determinatur, circularem sæpiùs repetitum, & in se quasi replicatum, inquit Philosophus: idémque rursus in hanc mentem; Ὡς ἐνδέκεται κίνησιν εἶναι τὴν αὐτὴν, καὶ μίαν πάλιν καὶ πάλιν, οὕτω καὶ χρόνον ἐνδέκεται, ὅιον ἐνιαυτὸν, ἢ ἔαρ, ἢ μετόπωρον. Ast opportunum non est de tempore plura nunc effundere. Velocitatum par est ratio, quæ mediantibus itidem spatiorum simul decursorum congruentiiis ipsæ sibi congruant, & consequenter æquales ostendantur. Quinetiam si duo corpora gravia ejusdem speciei, puta duæ sphæræ æquales aqueæ vel aereæ, per mentalem istam antehac expositam penetrationem congruere supponantur, eàdem opera gravitates seu ponderositates, ipsarum coincident & congruant, eâque ratione deprehendentur æquales. Quin & ipsis rationibus, seu proportionibus æqualibus, aliquo modo tribuatur congruentia, quatenus omnes coincidunt & identificantur uni cuidam in numeris, lineis, aut aliis quantis expositæ (quæ quidem exposita ratio spatii quoddam instar habet, (respectu infinitarum quas repræsentet & exprimat rationum, illas omnes quasi recipiens in se, & inter se coadunans). Numeri verò quatenus æquales, eatenus & congruentes esse possunt, per congruentiam scilicet ipsorum quantorum æqualium quæ repræsentant ac denominant. Adeò cujusque generis quanta sicut alias magnitudinum

Phys. IV. 18.

proprietates, ita congruentiam recipiunt suo modo, hoc est, analogicè, consecutivè, participativè, propter magnitudinum, à quibus determinatur eorum quantitas, congruentiam; & consequenter æqualitatis à congruentiæ suppositione resultans definitio, ne quidem illis omnino disconvenit, imò revera tantùm illis, quantùm æqualitas ipsa competit & assignatur merito. Sed ad quartum responsi caput promoveo pedem; Quòd expediat aut ad minimum liceat aliorum quantorum æqualitates seorsim definiri vel explicari; ex æqualitate scilicet respectiva magnitudinum, quibus insunt, aut circa quas modo quovis occupantur. Nam (ut priùs insinuatum) eorum quæ sunt & dicuntur πρὸς ἕν, id ratio communis exigere videtur, ut quæ primaria sunt in suo genere, adeóque quasi mensuræ reliquorum definiantur imprimis per se, cum alia consequenter ex relatione, quàm ad ista priora sortiuntur, peculiari declarentur. Ita nos iterum docet horum callentissimus & perspicacissimus Philosophus; Ὥστε διελόμενον inquit, πωσαχῶς λέγεται ἕκαστον οὕτως ἀποδοτέον πρὸς τὸ πρῶτον ἐν ἑκάστῃ κατηγορίᾳ πῶς πρὸς ἐκεῖνο λέγεται· τὰ μὲν γὰρ τῷ ἔχειν ἐχεῖνα, τὰ δὲ τῷ ποιεῖν, τὰ δὲ κατ' ἄλλους λεχθήσεται τοιούτους τρόπους· hoc est, eorum quæ inæqualiter attribuuntur aut prædicantur (seu τῶν πρὸς ἕν) distinguendum est imprimis quotupliciter singula dicuntur, tum explicandum est quo pacto referantur ad id quod in dicto genere (vel prædicamento) primum est; quædam enim quòd habeant ipsum, quædam quòd efficiant, quædam secundùm alios hujusmodi modos attribuentur.

Met. III. 2.

tur). Ita cùm æqualitas pluribus conveniat, magnitudini quidem originaliter & præcipue, reliquis quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, potentiis motricibus) minùs principaliter & ſecundariò; primùm illius quæ magnitudinibus convenit æqualitatis conſtituenda ratio eſt, tum explicandum quomodo reliquorum quantorum æqualitates ad ipſam referuntur; eóque fit ut ſeparatim definiuntur. Et velocitates quidem, e. g. æquales, ex Ariſtotelis mente definiantur, à quibus eodem tempore (vel æqualibus temporibus) eadem vel æqualia ſpatia tranſmittantur (Ὁμοίαχὲς, inquit, τὸ ἓν ἴσῳ χρόνῳ ἴσον κινούμενον. Et, Τὰ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὸ αὐτὸ μέγεθος κινούμενα ἰσοταχῆ. Ecce ut æquè velocium definitionem ingrediatur μέγεθος, útque non illicitum nec ἀπροσδιόνυσον cenſuerit Philoſophus, velocitatis æqualitatem definire) pariter æqualia tempora definiantur, in quibus æquabili motu latum corpus aliquod notabile (tempori determinando ſcilicet aſſumptum, Sol puta vel Luna) æquales peragit ſui curriculi partes; & ἰσόχρονα vocentur, quæ coexiſtunt iſtis æqualium ſpatiorum confectionibus. Similiter æqualia pondera dicantur (abſolutè loquor, & ſepoſito ad Mechanicas applicationes eorundem gravium momenta variantes reſpectu) reſpectu ſubjecti, quæ magnitudinibus ſpecie iiſdem, & quantitate æqualibus inſunt; reſpectu objecti, vires motrices æqualium (ſimiliter poſitarum & quoad omnes conditiones partium) magnitudinum; vel quæ poſſunt eaſdem, aut æquales ejuſdem ſpeciei magnitudines ſublevare: & ἰσοβαρῆ,

quæ viribus ac potentiis prædita sunt æqualibus. (Quidam apud Aristotelem veteres Philosophi, ex subjacente materia definiebant ἰσοβαρῆ, τὰ ἐξ ἴσων συγκείμενα τῶν πρώτων, vel τὰ ἐξ ἴσων συνεστῶτα· quæ ex æqualibus principiis, aut æqualibus materiæ particulis constant). *De Cœlo IV. 2.* Æquales denique numeri definiri possent, quæ repræsentant magnitudines eodem modo divisas (vel accuratiùs aliquovis simili modo). Hisce consimilibúsque pactis nil obstat, quin definiantur omnium quantorum æqualitates, imò multùm fortè proderit hoc ipsarum distinctæ comprehensioni. Neque desunt exempla præstantissimorum authorum, qui nedum hujusmodi quandam præ se ferentium homonymiam, at majoris perspicuitatis causâ quorundam etiam συνωνύμως dictorum quantorum æqualitates separatim definire non dubitarint. Nam Euclides elemento undecimo, solidas definivit æquales figuras, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur. Et magnus Apollonius (initio sexti Conicorum libri, nuper ex Arabico in Latinum sermonem transfusi, & à præstantiss. Borello luce donati) æquales definivit coni-sectiones, quæ ad invicem sibi mutuò superpositæ congruunt. Ut reticeam Euclidem (id quod innui jam antehac) in libello de gravi & levi, æqualia magnitudine definiviſſe (formaliter & expresse juxta nos) quæ replent eundem locum. Nec ferè dubito quin gravium æqualium aliqua isthic extet definitio, cui præluserit hæc de magnis æqualibus. Quinimo, quod affine est nostro negotio, Euclides partis definitionem tradidit aliam atque aliam,

de

de magnitudinibus & numeris. Idémque quinto in elemento, ex uſu putavit magnitudinum analogiam ſeorſim definire (ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγειν εἶναι) numerorúmque proportionalitatem aliter in elemento ſeptimo definire; unde neceſſitatem impoſuiſſe ſibi videtur, ſiquando de quantis aliis inſtituiſſet dicere, ipſorum quoque proportionalitatem ſingillatim definire, vel illam ſaltem de magnitudinum proportonalitate traditam iis accommodare. Quare ſi peccatum eſt (quod pertendunt adverſarii) nomen idem, quatenus diverſis genere vel ſpecie rebus attribuitur, aliter ac aliter definire, ejus admiſſi reos allegemus, quibuſcum errare non admodum pudeat nos, auctores perquam nobiles & eximios. Tandem (ut hujus objectionis examini coronidem imponamus) plurimùm haud diffiteor adducta valeret ratio, ſi poſſit alia quæpiam bene commoda generalior æqualitatis notio aſſignari. Sed nulla ſuccurrit alia, ſaltem hâc potior, hypotheſi cuivis ad ſenſûs obſervationem, vel ad mentis captum evidentiùs exploratæ ſubnixa. Tentavit quidem (ut adnotavimus in Lectione præcedente) duas memoratus egregius vir, nec alias, opinor, meliores potuit comminiſci, quæ tamen, ut oſtendimus, in noſtram hanc penitius excuſſæ recidunt, quódque non aliter vel eædem, vel tantæ eædem concipiantur eſſe diverſarum rerum quantitates, quàm per congruentiam aliqualem, ſeu propriam ſeu analogicam. Nam ut hoc unum adjiciam, nonnihil elucidandis & confirmandis tunc dictis; quantitatis identitas ſpecifica minimè ſufficit æqualitati con-

conſtituendæ (tunc enim omnes circuli, cunctæ ſphæræ, quælibet figuræ ſimiles æquarentur ſibi mutuò) ſed ad hoc identitas quædam numerica poſtulatur; non illa quidem actualis, at ſaltem poſſibilis, qualis optimè (nec aliter opinor) per illam quæ ex congruentia emergit, quantorum coincidentiam & coalitionem exhibetur. Hæc igitur notio, cum magnitudinibus (hoc eſt, propriè & primariò quantis) eximiè quadret; & aliis quantis aliquo modo; cúmque alia quanta per magnitudinis æqualitatem definiri poſſint & debeant; & quando non alia poſſit excogitari convenientior; his, inquam, expenſis huc non gravatim admittenda videtur & approbanda, nequicquam obſtante propoſito contrario diſcurſu. Hoc igitur argumento præcipuo, maximam verisimilitudinis ſpeciem præ ſe ferente defuncti, alterum huic ſuccenturians aggrediamur, ut adverſarii conſiſunt, haud minùs Achilleum & invictum, ſed ut mihi videtur, enervius & puſillius multo. Ejuſdem (inquiunt) loci poſſeſſio vel repletio æqualitati extranea & accidentaria eſt; nec minùs æquales ſunt magnitudines, etſi non poſſideant eundem locum, quam ſi maxime poſſideant. Et figuræ diſſimiles eundem locum occupare nequeunt, nisi partium ſitus transmutetur. *Quid autem* (aiunt) *motus & locus, & tranſmutatio ad æqualitatem ſpectant? Pyramis enim, etiam dum manet pyramis, non minùs eſt æqualis (ut ut non ſimilis) quàm ubi tranſformatur; atque dum alibi manet æqualis eſt (ut ut non ibidem) non minùs quàm ubi in eundem locum movetur. Ergò non magis ex reſpectu*

ad

ad locum (adſumptâ partium quum opus eſt tranſpoſitione) *debet æqualitas definiri, quàm homo ex eo quòd poſſit eſſe princeps Tranſylvaniæ* (ſic enim argumentum ſuum etiam ſale condiunt, nè fortè putreſcat, aut minùs ſapiat). Verùm reſpondeo reſpectum ad ſpatium ab ipſo occupabile non eſſe magnitudini cuivis accidentarium aut extrinſecum, ſed ei neceſſario, intiméque connexum; ſicut actui cuivis convenit intrinſeca ſibi connata ἕξις ad potentiam, cui reſpondet, quam complet. Non magis, inquam, magnitudinis naturæ convenit eſſentialiter, ut terminetur, extendatur, componi poſſit aut dividi, vel ut alio quovis attributo gaudeat, quàm ut tantam talémque ſui capacitatem (tantum & tale ſpatium) adimpleat. Ex hujuſque ſuppoſitionis fonte multæ Mathematicis neceſſariæ hypotheſes promanant, ut ex antehac oſtenſis ſatis pateat. Porrò, etſi magnitudinibus, ceu talibus, non obtingat neceſſario, definitum ut locum aut ſitum, hunc vel illum, poſſideant; tamen illis ut æqualibus neceſſariò convenit, ut eandem aliquo modo quantitatem habere poſſint, & proinde ut locum eundem inſidere poſſint, tum quoniam ex eo quòd eandem actu quantitatem habent, planè conſequetur ipſas de facto ſpatium idem occupare; tum quia nullo alio modo concipi poteſt identitas iſta poſſibilis. Ad hæc, quòd non contingenter æqualibus accidat magnis hæc ejuſdem ſpatii poſſidendi capacitas, ex eo clariſſimè liquet, quòd rem ſeriò perpendenti nil aliud de quibuſvis magnitudinibus inter ſe quoad æqualitatem, aut quamvis proportionem, collatis demonſtrant

ſtrant Geometræ, quàm illas congruere, vel eundem locum occupare poſſe: quum, inquam, Euclides trigonum conum æqualem oſtendit cylindro; cùm Archimedes ſuperficiem ſphæræ quadruplo maximo ejuſdem ſphæræ circulo demonſtrat adæquari, cúmq; circulum æquiparari docet ſuo ipſius radio ducto in ſemiperipheriam, eò res recidit (ipſam ſcilicet altiùs è primis principiis repetenti) & nihil evincunt aliud ipſorum ratiocinia, quàm iſtas tales magnitudines ſibi congruentes eſſe poſſe. Siquidem ipſorum demonſtrationes pendent è primis elementis, nominatim ex quarta & octava primi elementi, ubi demonſtratur triangulorum æqualitas, ex eo quòd poſſint congruere. Ergò ſi poſſe locum eundem occupare ſit quid accidentarium magnitudinibus iſtis, nihil neceſſarium demonſtrârunt Geometriæ principes; id quod horridulè ſonat auribus Mathematicis. Præterea, occupatio loci non magis eſt alienabilis, non minùs eſt intrinſecè conjuncta cum magnitudine, quàm motus, ſeu mutatio loci; útque magnitudines ubicunque poſitæ concipiuntur æquales, ita figuræ utcunque quieſcentes ac innotæ, ſuam eandem naturam obtinent atque ſervant. Nihilominus omnes Geometræ non dubitant figuras quaſvis à motu quocunque, quo nimirum facilè poſſint progenerari, definire. Ut Euclides ſphæram ex revolutione ſemicirculi circa diametrum, cylindrum ex parallelogrammi circa latus, conum ex trianguli circa crus rotatu; Apollonius universè conicam ſuperficiem ex rectæ lineæ circularem peripheriam circumeuntis tranſitu; Archimedes

medes conoidæa ac ſphæroidæa ex conicarum ſectionum portionibus planis circa diametrum volutatis: & nemo non Geometrarum ſimili modo magnitudines quaſlibet (lineas, ſuperficies, ſolida) è motibus circularibus, rectis, parallelis, mixtis utcunque pro ſuo arbitratu fas eſſe ducit definire. Quæ quidem definitiones nedum legitimæ, ſed omnium optimæ ſunt: nec enim ſolummodo definitæ magnitudinis naturam explicant, ſed poſſibilem ejus exiſtentiam commonſtrant, conſtructioníq; modum evidenter indigitant, non modò qualis ſit deſcribunt, at quòd talis eſſe poſſit experimento probant, & quo pacto talis evaſerit, extra dubitationis aleam conſtituunt. Et par eſt ratio, ſimilis virtus hujus noſtræ ex congruentia deſumptæ definitionis; non enim ſolùm exponit quod ſit æqualitas magnitudinum, at quòd æquales dari poſſint, indicat luculentè quâ ratione fiant, dignoſcantur, explorentur æquales magnitudines edocet manifeſtè modo ſcilicet qui frequentiſſimo paſſim in uſu eſt, & nuſquam non æqualitati diſcernendæ dijudicandæque ſolet adhiberi. Itaque nemini diſplicere debet hæc definitio, cui definitionum indoles perſpecta eſt, & quomodo ſemper ex aliqua poſſibili ſuppoſitione reſultent ipſæ, probè ac prudenter animadvertit. Superſunt multa, quæ cogitàram attingere, ſed levioris momenti, quorúmque facilè poſſit è dictis & inſinuatis ſolutio perſpici deducíque; ut & à vobis ſuppleri poſſunt, quæ congruentiam & æqualitatem ſpectant reliqua. Et alioquin me, pariter ac vos, impensè tædet hujus in re tenui je-

jejunáque tam enormiter profuſæ diſputationis. Neque nonne fas eſſet à tanto ſublimioribus, quæ vos monent, ratiociniis detinere. Igitur, optimi Auditores, jam valete. Proximâ Lectione me conferam aliò; & magnitudinum præcipua ſymptomata proportionem ac analogiam ad partes vocabo.

LECT. V.

EMagnitudinum attributis & ſymptomatis, quæ Mathematicis ſubjacent hypotheſibus, ultimum tractavi congruentiam; & ex ea rectiſſimè deſumi notionem æqualitatis effusè diſſertavi. Res jam poſcere videtur ut aliò tranſeam; verùm quæ mea eſt infelicitas, materiam iſtam dimittere nequeo, priuſquam è dictis conſectariam unam aut alteram annotatiunculam; ad ulteriorem propoſiti declarationem ac uſum ſpectantes, adjunxero. E traditis igitur ac diſputatis
1. detegatur imprimis notabilis error Procli, & plerorumque, qui poſt eum in octavum elementi primi pronunciatum commentati ſunt, interpretum. Axioma ſic exprimitur; Quæ ſibi mutuò congruant, ea inter ſe ſunt æqualia: hoc negat Proclus univerſaliter converſum valere; (Τοῦτο (inquit, hoc eſt, æquales magnitudines congrueret) οὐ πάντα ἐπὶ πάντων ἀληθὲς, ἀλλ' ἐπὶ τῶν ὁμοειδῶν. *Non omnibus verè convenit, at ſolis ejuſdem ſpeciei, vel perfectiſſimè ſimilibus magnis).* Eíque poſtremo ſuccinens Borellus; *Converſum ve-*

rò

rò (ait) *quòd ſcilicet ea quæ æqualia ſunt, invicem ſibi congruant, non in omnibus verum eſt, ſed in iis quæ ſpecie ſimilia ſunt, ut lineæ rectæ inter ſe, & circumferentiæ æqualium circulorum, ut Proclus animadvertit.* Verùm hæc exceptio diligentiùs inſpecta, nedum non eſt neceſſaria, ſed (id quod mirum videatur tot perſpicaces viros effugiſſe) planè falſa comperietur. Nam per congruentiam intelligunt iſthic vel actualem aut potentialem congruentiam. Utrolibet accipiatur modo, veritati diſcrepabunt ab iis enunciata. Si de actuali capiunt, evidentiſſimæ falſitatis convincuntur, ex eo quòd non omnes æquales rectæ, nec æqualium circulorum peripheriæ, nec æquales utcunque magnitudines vel ſimillimæ, actu congruant, at loco ſæpè disjunctiſſimæ ſint; quantum ſcilicet ab Arctico circulo diſtat circulus Antarcticus ei, ſitu contrarius, ac ſpecie perſimilis, & magnitudine prorſus æqualis. ſi de potentiali, patet ex oſtenſis & non oſtendendis etiam falsò affirmari, quod æquales aliquæ magnitudines non congruant. Nam contrà veriſſimum eſt, omnia magna æqualia, quantumvis ſpecie diverſa, vel diſſimilia ſibi poſſe congruere. Verum quidem eſt ejuſdem ſpeciei magnitudines, & ſibi perfectiſſimè ſimiles (ut nempe rectas lineas æquali radio deſcriptos circulos, æquales angulos rectilineos) peculiari quodam modo, retento nempe partium ordine, ſitúque neutiquam variato congruentiam actualem admittere; faciliùs etiam ipſarum poſſibilis congruentia deprehenditur, & ex ipſarum forſan definitione ſtatim inſertur; at non minùs hoc verè convenit

venit omnibus aliis æqualibus magnis, quæ partibus suis quibuscunque translocatis, & figurâ suâ nonnihil immutatâ possunt quàm accuratissimè fieri congruentes ; hoc est, unius partes (quæ à toto non differunt) alterius spatium exactè possidebunt. Figuræ verò retentio nihil adjicit, ut nec ejus alteratio derogat æqualitati vel congruentiæ magnitudinum; nec omnino facit πρὸς τὰ ἄλογα ejus hîc consideratio ; ut neque possibilis congruentiæ facilis vel difficilis comprehensio: nam æque verum est, quòd per mille discursuum ambages legitimè demonstratur, ac quod intuitu primo perspicitur, aut unico conclusum elicitur syllogismo. Euclides sanè datæ rectilineæ figuræ cujusvis, cum aliquo determinato quadrato, cujusvis solidæ figuræ planis superficiebus contentæ cum aliquo certo cubo congruentiam demonstravit (aut, quatenus hoc postremum fieri potuit, attentavit) id est, ipsas dimetiendi modum edocuit aut investigavit: Archimedes ultrà progressus circulos & sectores circulares, nec non superficies curvas, conicas, cylindricas sphæricas comparavit, & alias cum aliis congruere, per clarissimas consequentias demonstravit. Cùm, inquam, e.g. demonstravit Archimedes circulum æquari rectangulo triangulo, cujus basis radio circuli, cathetus peripheriæ exæquetur (vel quod eodem recidet, quadrato cujus latus est media proportionalis inter radium & semiperipheriam circuli) nil ille, siquis propiùs attendat, aliud quicquam quam aream circuli seu polygoni regularis indefinitè multa latera habentis, in tot divisi posse minutissima triangula,

quæ

quæ totidem exiliſſimis dicti trianguli trigonis æquentur; eorum verò triangulorum æqualitas è ſola congruentia demonſtratur in elementis. Unde conſequenter Archimedes circuli cum triangulo (ſibi quantumvis diſſimili) congruentiam demonſtravit. Item cùm ab eodem conica ſuperficies æqualis oſtenditur areæ circuli, cujus radius proportione medius eſt inter coni latus & ſemidiametrum baſis, nil oſtendit aliud (ut planè liquebit ad primam demonſtrationis originem recurrenti) quàm ſuperficiem iſtam velut ex infinitis exiguis triangulis conſiſtere, quæ ſingula congruunt tot ſingulis triangulis dictum circulum componentibus. Ita congruentiæ nihil obſtat figurarum diſſimilitudo; verùm ſeu ſimiles ſive diſſimiles ſint, modò æquales, ſemper poterunt, ſemper poſſe debebunt congruere. Igitur octavum axioma vel nullo modo converſum valet, aut univerſaliter converti poteſt; nullo modo, ſi quæ iſthic habetur congruentia deſignet actualem congruentiam; univerſim, ſi de potentiali tantùm accipiatur; quaſi diceretur, Quæ congruere poſſunt, æqualia ſunt; & conversè. Quo pacto potior ratio ſuadet ut intelligatur. Etenim præſtat utiliſſimum illud pronunciatum ſic exponi, ut valeat omnimodè converſum, quàm ut nullatenus converti queat; útque magnitudinis eſſentialem paſſionem contineat, quàm ut accidentarium ſolummodo ſymptoma reſpiciat. Nam actu congruere nihil ad magnitudinis aut æqualitatis naturam pertinet, at ipſis contingenter accidit; nec ob aliam cauſam adhibetur, quàm ut ab ea ſeu manifeſto indicio (quippe cùm

actus ſemper antegreſſam arguat potentiam) congruentia potentialis innoteſcat, quæ nempe ſola cum æqualitate cohæret intimè, cúmque ea perpetuo reciprocatur. Sicut enim magnitudini non actu dividi, ſed eſſe diviſibilem connatum cenſetur, & arctiſſimè connexum; iſta verò diviſibilitas ex actuali (utcunque fortuitâ vel arbitrariâ) diviſione dignoſcitur ac arguitur; ita quantis æqualibus, ut talibus, accidentaliter obvenit, ut congruant actu, convenit autem inſeparabiliter & perpetuò ut poſſint congruere; huic autem commonſtrandæ potentiæ deſerviat actus iſte, propterea que ſolet adhiberi. Igitur perperam Proclus, & alii plerique Procli veſtigiis inſiſtentes, explicant hoc axioma, non ſatis animadverſo, quod actualem inter & poſſibilem congruentiam verſatur, diſcrimine, ſolámque quæ minùs hîc attendenda fuerat reſpicientes actualem congruentiam. Unus ab hac erroris contagione ſe conſervavit immunem optimus Clavius; quem immeritò propterea reprehendit doctiſſimus ejus ὁμώνυμος Tacquetus; *Non rectè Clavius* (inquit) *hoc axioma convertit; falſum eſt enim ea quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt ſibi mutuò congruere, diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent, quòd ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit converſa.* Ego verò potiùs Clavii ſingularem aut prudentiam aut εὐτυχίαν demiror, qui communiter arreptum errorem feliciter evitavit, iſtámque falſo fundamento ſubnixam exceptionem prorſus omiſit, veréque licèt haud plenè, ſatísque luculentè pronunciatum illud expoſuit. Sed in hoc nimiùs
2. fui, quamvis nonnulla ſubticeo. Noto ſecundò,

cundò, quòd ex æqualitatis hac præſtrata definitione, quæ æqualitatem ſpectant, axiomata poſſunt demonſtrari. Id quod ejus arguit convenientiam atque præſtantiam. Debent enim axiomata (ſicut admonitum eſt ſæpiùs) ut theoremata quædam è ritè conſtitutis terminorum, quibus conſtant, definitionibus demonſtrari poſſe. Solem igitur iſtum, quem appellavit Ramus, in Mathematicis clariſſimum, Quæ eidem æquantur, ſibimet æquantur mutuò, ſic petitâ hinc demonſtratione illuſtravit Apollonius: Sint duæ magnitudines A,C, utraque ſingillatim æqualis alteri tertiæ B. Dico magnitudines A,C ſibimet æquari. Nam quoniam ex hypotheſi æquantur magnitudines A,B, ipſæ (æqualitatis definitione præmiſſa) congruere vel occupare poterunt eundem locum. Occupent igitur locum Z. Item quoniam C æquabilis ponitur ipſi B occupanti locum Z, etiam C; ex æqualitatis definitione poterit locum Z occupare. Ergò utraque A & C poterit locum Z occupare. Unde reciprocè ex æqualitati definitione A & C æquales erunt, Q,E,D. Huic autem definitioni objicit Proclus, quòd innitatur aſſumptis duobus hujuſmodi pronunciatis, Quæ poſſident eundem locum ſunt æqualia; quæ eundem cum altero locum occupant, locum ipſa poſſident eundem; quorum utrumque propoſitâ concluſione demonſtrandâ longè aſſerit obſcurius & conceſſu difficilius; Τᾶυτα (dicit) ὅτι πολλᾷ ἀσαφέστερα τᾷ προτάσει ἀξιώματά ἐναργῆ· Et nihilo mitiùs, Οὐκ ἔστι παντελῶς ἓν τῶν ἀναδεκτέον τὸ μεταβαίνειν ἐπὶ τὸ τόπον, ὅς ἐστιν ἀγνωστότερον ἡμῖν

ἴσῃ τῇ ἐν τόπῳ ὄντων. Sed in magni Geometræ defensionem breviter respondeo: Primò, liquidò falsum esse, quòd loci seu spatii, quàm æqualitatis consideratio sit obscurior, & ignotior nobis. Cùm ex antehac ostensis, æqualitas non aliter quàm ex ea possit elucidari. Congruentia quoque, vel ejusdem loci possessio supponi potest, ex eo quòd à sensu possibilis discernatur; ast æqualitas immediate sensum non incurrit, at ex aliqua comparatione suppositâ resultat; itaque clarior est congruentiæ notio quàm æqualitatis. Et cùm quæ eundem locum occupant æquantur, sit commodissima definitio æqualitatis (utri sufficienter astruxisse videmur) erit illa simplicior ac evidentior aliâ quâvis æqualitatem includente propositione. Sicut definitio trianguli simplicior est & clarior quovis circa triangulum theoremate. Secundò, quod alterum attinet pronunciatum, Quæ eundem cum altero locum occupant, eundem & ipsa locum possident; nego quicquam illo clarius esse posse, nedum ut hoc obscurius sit propositâ conclusione. Est enim ad fundum explorata, propositio prorsus identica, nec specie differens ab hac, Petrus est Petrus; ad hanc enim reducitur ejus sensum nihil immutando, tantùm vero perspicuitatis gratiâ nomina magnitudinibus imponendo, Z locus communis ipsorum B,A, est idem cum Z loco communi ipsarum B,C. Aut ista Categorica, Quæ eundem cum altero locum occupant, locum ipsa possident eundem, redigi possit in hanc ἰσοδύναμον enunciationem hypotheticam, Si A occupet Z locum ipsius B, & C locum Z ipsius B occupet,

tum

tum A & C occupabunt locum eundem Z. Ubi repetitur in consequente, quod in antecedente ponebatur. Quænam igitur, obsecro, poterit hâc esse manifestiùs vera propositio? non illa certè, Quæ eidem æqualia: quum æqualitas quid sit, quid distinctè significet antea prægnosci debet, quàm ejus propositionis veritas queat comprehendi. Sed adhuc tertiò, hoc modò dictum nugax & futile pronunciatum demonstrationi nostræ præsterni, vel in ea adhiberi nego. Nos tantùm ex eo quòd magnitudo supponatur occupare locum Z, inferimus ei parem C posse locum istum Z occupare: id quod immediatè consectatur ex æqualitatis præmissa definitione. Nec aliud ab eo principium adhibemus. Attendat quilibet: Nequicquam igitur ficulneis telis Proclus Apollonii demonstrationem impugnat; quòd verò graviter concludit, Πάντα ἀξιώματα ὡς ἄμεσα καὶ αὐτοφανῆ παραδοτέον γνώριμα ἀφ' ἑαυτῶν ὄντα καὶ πιστά. Ὁ γὰρ τοῖς φανερωτάτοις ἀπόδειξιν προσάγων, ἃ βεβαιοῖ τὴν περὶ αὐτῶν ἀλήθειαν, ἀλλ' ἐλαττοῖ τὴν ἐνέργειαν (ἐνάργειαν lege potiùs) ἣν ἔχομεν ἐν τοῖς ἀδιδάκτοις προλήψεσι· (hoc est, *Omnia axiomata, velut immediata, suâque luce clara tradi debent, à seipsis manifesta fidémque promerentia. Nam qui rebus evidentissimis demonstrationem applicat, non ipsarum constabilit veritatem, sed evidentiam imminuit, quam in præconceptis absque doctrina notitiis possidemus.*) Cui sententiæ, quòd ad vulgarem praxin attinet, ipse lubens subscribo, nec opus esse fateor, ut tam facilem assensum impetrantes notitiæ scrupulosiùs examinentur. At quo demonstrati-

onis ingenium, ſcientiæ natura, principiorum differentia, magis declarentur ; quòd extremus rigor etiam axiomatum exigat probationem, quòd ea revera poſſint demonſtrari, quòd definitiones bene conſtitutæ ſint, iiſque demonſtrandis inſerviant, non inutile cenſeo prolatis nonnunquam experimentis edocere. Neque qui proinde vel hiſce de cauſis, vel ingenium exercitandi gratiâ tale quid attentaverit, furoris illum aut faſtûs meritò putem arceſſendum, quorum tamen eapropter Apollonium ipſum, immenſæ ſubtilitatis, & conſummatiſſimæ in Mathematicis eruditionis virum, inſimulare, non dubitat è recentioribus nonnemo ſeverior Ariſtarchus, utinam ipſe vitiis iiſdem non propior. Utcunque tanti viri fretus exemplo non verebor ipſe, duo quæ dicto primo proximè ſuccedunt axiomata protinus è dictis oſtendere. Secundum axioma taliter ſe habet; Si æqualibus æqualia adjiciantur, compoſita (vel tota) ſunt æqualia. Quod ita demonſtro: Sint æquales duæ magnitudines A,B; quæ propterea ex æqualitatis definitione congruere poterunt, & eundem locum occupare. Occupent igitur locum X; adjiciatur ipſi A magnitudo C, cujus locus ſit Y. Ergò compoſitæ A-|-C locus eſt X-|-Y. Adjiciatur etiam ipſi B magnitudo D æqualis adjectæ priori C; unde itidem ex æqualitatis definitione D poterit occupare locum X: adeóque B-|-D occupare poterit locum compoſitum X-|-Y; eundem nempe quem A-|-C potuit occupare. Ergo ex æqualitatis definitione B-|-D æquabitur ipſi A-|-C. Q.E.D. Simili diſcurſu demonſtretur axioma proximè

mè ſubſequens; Si ab æqualibus auferantur æqualia, reſidua erunt æqualia. Sint enim rurſus æquales duæ magnitudines A,B; quarum proinde communis eſſe poterit locus X. His auferantur æquales C,D, quarum etiam communis eſto locus Y. Ergò reſiduus locus X—Y communis eſſe poterit locus utrique reſiduæ magnitudini A—C & B—D. Ergò reſiduæ A—C & B—D æquantur. Quod E.D. Nec diſſimili ratione quævis ad abſtractam æqualitatem pertinentia theoremata (vel axiomata) dictæ definitionis ſubſidio demonſtrentur, quod ejus oſtendit præſtantiam atque commoditatem. Sed hanc obſervationem miſſam faciens ſubnoto tertiò, Quòd ex dictis facilè perſpiciatur quid ſit inæquale, quid majus, quid minus altero. Horum nempe quidvis vix ex reſpectu ad oppoſitum æquale, vel immediatiùs ex relatione ad ſpatium utcunque poterit explicari. Reſpiciendo ſpatium ad inæquale dicetur, quod alteri ſemper & neceſſariò diſcongruens erit, hoc eſt, quod alteri quomodocunque applicatum (ſeu ſimul, ſeu ſucceſſivè, ſeu per mentalem penetrationem, ſeu retento partium ſitu, ſeu ipſarum ordine perturbato, quolibet ex modis ſuperiùs expoſitis) nullo pacto coincidet exactè, ſed aut excedet ipſum, vel ab eo deficiet. Conſequenter ex duabus inæqualis ſpeciebus, id Majus erit, quod alteri ſic appoſitum vel applicatum, excedet ipſum, hoc eſt, totum alterius ſpatium occupabit, & aliquid inſuper ulterioris ſpatii; vel cujus pars alteri toti congruet, ſeu totum alterius ſpatium replebit; Minus, quod alteri appoſitum deficiet

ciet ab ipso, vel alterius parti coincidet; non nisi partem occupabit spatii, quod ab altero possidetur. Habito autem ad æquale respectu, dicetur inæquale, quod alterum vel alteri æquale continet in se, & aliquid insuper, vel continetur in altero (vel in aliquo quod alteri æquatur) sic ut aliquid præterea superstit. Majus nempe, quod continet alterum, aut alteri æquale, nec non aliud præterea: Minus, quod continetur in altero, vel in eo quod æquatur alteri, sic ut adhuc supersit aliquid in altero. Vel cum D. Hobbio, non inconcinnè definiatur Major magnitudo magnitudine (corpus corpore dicit ille, sed universaliùs efferri præstat) quando pars illius huic toti æqualis est: Minor autem, quando illa tota parti hujus æquatur; quanquam forsan in hisce definitionibus nonnihil desideretur. Nam objici potest, quòd non respondent eis magnitudinibus inæqualibus, quarum una comprehendit alteram. Quod facilè tamen excusetur aut condonetur, quoniam omnis magnitudo sibi perfectissimo modo censeatur æqualis; & æqualitatem eminenter continet identitas, id quod passim in demonstrationibus Geometricis supponitur. Vel corrigantur, & suppleantur definitiones istæ, hoc modo ipsas enunciando: Magnitudo magnitudine major est, quando pars illius huic toti æqualis est, aut eadem; Minor verò, quando illa tota hujus parti æqualis est, aut eadem. Quæ definitiones (aut descriptiones) inæqualis, majoris, minoris, aliis quoque quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus, numeris) analogicè suóque modo quadrabunt, sicut de

æqua-

æqualitate prolixiùs est declaratum. Unicum admonebo de inæqualitate dicta sic accipienda esse, semper ut excessus & defectus, id quod abundat aut subest, penes aliquod homogeneum intelligatur. Nam omnino diversi generis quanta quoad æqualitatem & inæqualitatem nequeunt inter se comparari. Quæ de proportione postmodum acturis distinctiùs explicanda venient. Ego verò nunquámne me tricis istis & leptologiis expediam? Semper in everrendis quisquiliis tempus prodigam? In tam opima messe, tam ubere vindemia, tanta gravissimarum disquisitionum copia, quid sparsas hinc inde spicas lego, neglectos racemos inquiro, dilapsa grana, deciduas uvas colligo? Cùm grandium & arduarum rerum in Mathematicis tam varia, tam jucunda, tam certa suppetat venatio, quare leviculas ego minutulásque quæstiones, ceu muscas, stylo prosequor & confodio? Solennia scilicet devito, seriò nugor, graviter ineptio, minima quæque studiosè conquirens, fastidiosè repetens & inculcans. Adeóne perpetim tot longinqua diverticula, tot devias ambages consectabor, & in tritos regiæ λεωφόρους calles nunquam remeabo? Num in hoc generalium materiarum atrio subdiali consenescam, in scientiarum vestibulo diversabor æternùm, hærebo semper in limine, Mathematum ostia tantùm pulsabo, nec in ipsorum unquam intimas ædes, in adyta sanctiora penetrabo? Præludam semper, & eminus velitabo, nunquam cominus aggrediar, manum conseram, fisto prælio decernam? Quid quòd in illa, quæ nil nisi clarum & evidens, certum & exploratum,

ploratum, pacatum & ſerenum pollicetur atque jactat ſcientia, dubitationum nebulas offundo, lites & bella ſero, turbas ac tempeſtates excito; diſceptando denique liberiùs, & ad ſcrutinium pleraque revocando, Mathematum certitudini & evidentiæ (quæ à rixis tantopere & à tumultibus abhorrent) detrahere videor & derogare. Ita mihi ſoleo, forſan & alii (ſaltem haud ſine cauſa vel ſpecie juſta poſſint) exprobare. Neque tamen nihil eſt, quod criminationibus iſtis diluendis, excuſandóque mihi contrà poſſim obtendere; cúmque tantum inſperato nunc effluxerit huic Lectioni deſtinati temporis, ut novam aliam materiam jam non invitus adoriri nequeam, indulgete precor (auditores humaniſſimi) veniæ pauxillum & patientiæ veſtræ noſtras has affanias aliquatenus propugnanti, conſiliíque quod hactenus iniverim mei ratiunculas exponenti. Quòd iſtas rerum & quæſtionum minutias attinet repono, non ſemper eſſe parva quæ talia videntur; cùm ſtellæ perquam exiles, & Sol non ita magnus appareat; unde veniat igitur, & quorſum tendat aſpectatæ rei ſpecies, antequam ejus dijudicetur magnitudo, pernoſcendum eſſe. Tum quæ mole parva ſunt, vi nonnunquam eximiâ donari; quæque nihil in ſe notabile continent, permagnas ſubinde poſt ſe trahere conſequentias. Maximarum rerum origines ferè ſemper parvas exiſtere; parvis è ſeminibus ingentiſſimas ſtirpes excreſcere, parvis è fontibus immenſos fluvios intumeſcere, veritatis & erroris præcipuè feracem eſſe naturam, è paucis veri ſcintillis vaſtam undiquaque lucem

cem diffundi, è minima falsitatis radice copiosam errorum segetem pullulare; in scientiis præsertim, è tenuibus filis maxima rerum momenta suspendi, nec sine maximi dispendii periculo minima contemni: sicut unâ rotulâ transpositâ tota perit machina, vel ad usum inepta redditur, venulâque subinde disruptâ vel magnus perimitur elephantus; ita nonnunquam unica, quæ gracilis videri possit & sterilis, notio malè posita, perperam intellecta, vastam confusionem, spissam caliginem, multiplicem errandi causam, ex fœcundâ consequentiarum propagine, in quamvis derivet scientiā. Prudenter hoc (ipse quoq; suæ acribologiæ, strictæque quibusdam in minutioribus diligentiæ patrocinans) observavit Aristoteles, verbis animadversione dignissimis, quæ extant in De Cœlo I. 5. Καὶ τὸ μικρὸν (inquit) παραβῆναι τῆς ἀληθείας ἀφισταμένοις γίνεται πόῤῥω μυριαπλάσιον· ὅιον εἴτις ἐλάχιστον εἶναί τι φαίνη μέγεθος· οὗτος γὰρ τοὐλάχιστον εἰσαγαγὼν τὰ μέγιστ' ἂν κινήσειε τῶν Μαθηματικῶν· τούτου δ' αἴτιον, ὅτι ἡ ἀρχὴ δυνάμει μεῖζον ἢ μεγέθει· διόπερ τὸ ἐν ἀρχῇ μικρὸν, ἐν τῇ τελευτῇ γίνεται παμμέγεθες· hoc est Latine, *Modica quæpiam aberratio recedentibus à veritate, statim immane quantum adaugetur & multiplicatur. Ut siquis magnitudinem affirmet minimam dari; is certè minimum inducens, maxima subvertet Mathematicorum decreta. Id autem exinde provenit, quod principium omne potestate sua, quàm absoluta magnitudine prævalentius est. Unde quod initio videtur exiguum, progressu tandem permagnum evadit.* Adeó periculosum est Philosophi judicio minimorum curam posthabere, quibus non

non tantùm ſua gratia, ſed & ineſt non rarò ſua quædam utilitas non aſpernenda; his præſertim in ſcientiis, quæ ex humilibus, & penè ridiculis initiis, ad incredibilem inopinatò amplitudinem & excelſitatem enituntur. Non itaque mihi graviùs ſuccenſendum eſt, ſi videar nonnunquam haud præcipui ponderis rebus quàm par eſt curioſiùs attendere, prolixiùs immorari; quando nempe res ſuadet, ut putem ex iis bene perceptis etiam gravioris momenti rebus aliquid lucis accedere. Quod autem ad illas, quas non infrequenter moveo controverſias, ex iis nemo ſuſpicetur Mathematicarum quicquam ſcientiarum certitudini decedere; nam circa res illæ verſantur à Mathematum fundamentis admodum remotas. Vix extimam Geometriæ cutem ſtringunt hæ quæſtiones, nedum ut ejus intima viſcera pertingant. Non ejus principia quatiunt hi arietes, non ratiocinia diruunt, aut omnino ſolicitant. Dum in ejus confiniis atque ſuburbiis contentiones oriuntur & pugnæ, clamores & jurgia perſtrepunt; intra muros, in ipſa acropoli alta pax, profundum habitat ſilentium; nihil iſthic auditur ἀμφισβήτητον aut ἀντίῤῥητον. Exempla deſumamus licet cùm aliunde, tum ex nuperrimis quas agitavimus controverſiis. Diſceptatum eſt quæ ſit æqualitatis genuina notio, unde commodiſſimè definiatur; an demonſtrari poſſint, quæ circa illam aſſumuntur axiomata: at num vera ſint iſta axiomata, nemo diſputat aut dubitat; & proinde nemo collectis eorum ſubſidio concluſionibus diſſentiet aut repugnabit. De principiorum natura & numero,

deque

déque modo ipsorum notitiam consequendi (num innata sint, aut aliunde comparata, num ex inductione generali, vel ex observatione tantùm singulari dependeat) disquiritur & disputatur; attamen ut sarta tecta permaneat, extra dubitationis aleam collocetur ipsorum veritas. Ambigitur & controvertitur an Euclides parallelismum commodè definiêrit ex negatione concursûs rectarum infinitè protractarum; at tales dari rectas, quæ sic nunquam conveniant, quæque non ineptè nominentur parallelæ, hactenus opinor inficiatus est nemo. An idem rectè principii loco sumpserit duas rectas, quæ cum insistente recta faciant internos ad easdem partes angulos minores duobus rectis, ab ista parte sibimet occursuras, ita negetur à quibusdam, ut tamen ipsius propositionis veritas à nemine vocetur in dubium. Et num Euclides istam proportionalium affectionem bene selegerit, à qua definivit ipsa (cum bona Prosodiæ venia liceat παρωδεῖν) Geometræ *certant, & adhuc sub judice lis est*, salvâ tamen cui nemo sapiens non astipulatur istius propositionis, sub theorematis forma traditæ, veritate. Complura proferre possem exempla, quibus constet quas Mathematici versant lites Mathematum certitudini vel evidentiæ nihil officere, sed ipsam potiùs inconcussam veritatem, intemeratam claritatem arguere, quas nulli disputationum tumultus dimoveant, nullæ discordiarum nubes obtenebrent. Neque mirandum hoc, quum non de præcipuarum rerum veritate, sed de quarundam propositionum ordine; non de scientiæ certitudine, sed de

sciendi

ſciendi methodo modóque, de quibuſdam tantùm exterioribus litigetur Philoſophicis potiùs quàm Mathematicis; quæ quidem non parùm interſit ſcire, quæque diſtinctam, plenam, & accuratam ad comprehenſionem rerum in Mathematicis pertractatarum nonnihil conducant, at cum Geometriæ principiis comparata (principiis iſtis, quorum dum incolumis perſiſtit veritas, nullum Matheſi gravius incommodum accedere poterit, nulla Geometrica concluſio ruet) cum his, inquam, collata, parva vel nulla reputari poſſint iſta, de quibus digladiamur; adeo verum eſt & hîc,

——*Minimas rerum diſcordia vexat,*
Pacem ſumma tenent——

Nec igitur mihi magnopere vitio vertenda eſt pugnacitas iſta, ſeu proclivitas ad diſputandum de rebus ad haſce ſcientias ſpectantibus, cùm nihil id noceat ipſarum firmitati, ſed ad ἀκρίβειαν aliquid conferat. Præſertim cùm ipſe nil agam aliud, eo conatum omnem dirigam, ut diſputando radices evellam, cauſas amoveam diſputandi, rerum quoad potero rationes experientiæ trutinam exponendo, à Metaphyſicis argutiis ad communem ſenſum omnia redigendo; nec pleraſque quæſtiones ipſe cudo, ſed alicubi (quanquam ut plurimùm leviùs diſcuſſas) reperio, ſententiam meam argumentis quibuſdam communitam interponens, veſtróque deciſionem ultimam arbitrio committens. Necnon regulam iſtam Ariſtotelis æquiſſimam, religiosè colens & obſervans, ſuperiùs (ſi bene commemini) allegatam, ſæpiùs repeti dignam: Μᾶλλον ἂν εἴη πρὸς τὰ μέλλοντα λε-

De Cœlo I. 10.

λεχθήσεσθ προοιμιώδεσι τὰ τ ἀμφισβητέντων λόγων δικαιώματα· τὸ γὰρ ἐρήμην καταδικάζεσθ δοκεῖν, ἧττον ἂν ἡμῖν ὑπάρχοι. Καὶ γὰρ δεῖ διαλλακτὰς, ἀλλ' οὐκ ἀντιδίκους εἶναι τοὺς μέλλοντας τ' ἀληθὲς κρίνειν ἱκανῶς. Quæ verba ſic verterim, *Fidem meliùs obtinebunt dicta, ſi partium argumenta priùs audiantur: nam indictâ causâ ſententiam ferre, partémque quamvis inauditam condemnare, minùs addeceat nos (Philoſophos nempe veritatem indagantes) oportet enim non tam adverſarios eſſe quam arbitros (& mediatores) qui de vero congruè velint judicare.* Quâ ſententiâ nihil juſtius, ſanctius, prudentius. At porrò, quod generalibus hiſce procœmialibus & præluſoriis inſiſtam largiùs & longiùs, excuſari poteſt: primò, quòd in illis ſe meditanti ſuggerant obſervatu non indigna, nec illa paſſim obvia, vulgóque protrita; ſed aut fermè non occurrentia, vel alibi parciùs expoſita) nec non in illis quædam paradoxa, veſtris adeò cum excitandis ingeniis, tum exercitandis judiciis comparata. Tum generatim diſtincta comprehenſio plurimùm conferre videtur ad ſubſequentium captum facilem atque perfectam notitiam. Nam de principiis variis & demonſtrationibus, de magnitudine, numero, ſpatio, motu, tempore, velocitate, pondere; de compoſitione & diviſione, terminatione & figuratione, æqualitate & inæqualitate, ſymmetria & aſymmetria, proportione & proportionalitate, ſimilitudine & diſſimilitudine, determinatione & indeterminatione; reliquíſque talibus à Mathematicis edita tot egregia problemata, tot pulcherrima theoremata legentibus demonſtrata, annon prævios iſtarum re-

rerum conceptus genuinos & adæquatos habere proderit multùm & intererit? Quales ego ſi minùs edocere poſſim, ſaltem occaſionem ingeram vobis propoſita ratiocinia maturiùs examinantibus tales acquirendi. Utcunque non parum refert has ambientibus ſcientias ipſarum communem quaſi genium familiariter habere perſpectum, & per eas omnes diffuſam indolem agnoſcere. Et ſanè mihi ſæpè contingit animadvertere (videor ſaltem animadvertiſſe) doctiſſimos aliquando viros, ex minus attenta generalium iſtorum conſideratione, & quia non niſi pravos aut confuſos (χυδαίους ad minus & ὀλιγοπαλαίους) eorum conceptus animo ſibi præfigurârint, non rarò crudè, crebrò falsè loqui ac diſſerere, ſubinde συλοικίζειν in re Mathematica, nonnunqnam & παραλογίζεσθαι. Præterea, non illibenter illorum vobis obſequor, & honeſtæ conſulo voluptati, qui cùm ad abſtruſiora Matheſeôs arcana percipienda minus idonei variant, & adhuc nonnihil imparati, guſtum tamen aliquem cupiunt, & capere poſſunt harum ſuaviſſimarum ſcientiarum; ipſarum non injucundum nec inutile quiddam per tranſennam inſpicere volunt & valeant; quos nolim omnino ſpe ſuâ caſſos, operæque prorſus irritos, (hoc eſt, difficultâte nimia vel apparente rerum obſcuritate turbatos) dimittere; neque diffiteor ad illorum captum tam dictorum plerunque materiam, quàm dicendi ſtylum attemperari; multa propterea dici quæ reticerem aliàs, & quæ dicerem, ideo complura prætermitti. Quin ſanè metuo, ne pleroſque particularium demonſtrationum, quales intima tractat

Ma-

Matheſis, arida ſubtilitas, extremus rigor, & penitiſſimam attentionem deſiderans, argumentandi modus aliquantum offendat ac abſterreat; quo nomine, ne diſſimulem, mihi videri ſolent illæ publicis hoc genus lectionibus haud adeo convenientes, unde libentiùs in his non ita jejunis & auſteris materiis aliquam moram traho; ut nonnulla tamen interſpergere ſtudeam (& deinceps, modò pergam in hoc ſtudio, liberaliùs interſperſurus ſim) ad Matheſin interiorem attinentia. Accedit quòd aliquibus, qui ſcientias iſtas primoribus labiis deguſtare non contenti ſeſe velint illis altiùs immergere, totóſque ſe Mathematico gurgite proluere, quíque Lectionibus hiſce noſtris dignabuntur intereſſe, temporis aliquid concedendum exiſtimem, dum hæc perſequimur ἐξωτερικὰ, Geometriæ ſe elementis penitiùs imbuendo, quibus ut non ſegniter incumbant, vehementer ab iis efflagito; aliàs impoſſibile credo fuerit, ex abſtruſioribus illis, imò nec è clarioribus ferè cujuſvis Mathematicæ diſciplinæ documentis quippiam audientibus intelligendum propinare; verùm ſphingis inſtar ænigmatici, vel σκότεινὰ cujuſdam Heracliti, meros griphos edere, denſis involvi tenebris videbor. Quòd ſi pleroſque ſcirem Geometricis elementis mediocriter initiatos, poſſem ſpero cum aliquo fructu, nec nulla cum veſtra voluptate, ſeu ſingularum diſciplinarum ima fundamenta detegere, regulaſque præcipuas demonſtrationibus ſuis munitas exhibere; vel quod ſcitu perjucundum eſt, & viros præſertim Academicos decet (qualibus antiquæ ſapientiæ ſtudium, & à fontibus ſuis diſcipli-

nas imbibere præ cæteris incumbit) veterum Mathematicorum in theoremats ſuis inveniendis demonſtrandíſque, adhibitam methodum explorare; vel qui præcipuus eſt ſcopus, & ſummus apex univerſæ Matheſeôs, generales quaſdam methodos faciliori omnifariorum problematum reſolutioni, theorematum inventioni, horum & illorum conſtructioni demonſtrationique, conducentes exhibere demonſtratas, & illuſtratas exemplis; quales multas utiliſſimas & elegantiſſimas methodos veteribus ignotas, ſaltem immemoratas, recentiorum invenit aut protulit induſtria. (Quales ſunt, obiter inſinuo, præter novum à Vieta & Carteſio præcipuè excultum Analyſis modum, cuicunque ferè quæſtioni ſolubili parem; methodus indiviſibilium Cavallerii, jam antehac ſed nunquam ſatis laudata; methodus circa maxima & minima, utilis & ipſa quamplurimis problematis promptiſſimè ſolvendis; variæ regulæ generales tangentium curvas inveſtigandi; modi curvas lineas producendi, ipſarúmque proprietates inveſtigandi ex motuum dependentia, necnon è motuum compoſitione; modi magnitudinum ordine certo creſcentium aut decreſcentium ſeries comparandi, necnon inde planorum & ſolidorum innumerorum menſuras determinandi; regulæ generales pro centris gravitatum expeditè reperiendis, in quolibet genere magnitudinum; necnon è deprehenſis gravitatum centris ipſarum magnitudinum dimenſiones facillimè deducendi; cum aliis minoris notæ pluſculis. Quorum aliquid ſi nunc aggrederer tradere, ſubvereor ut plurimi mentem

meam

meam haud penitus assequantur, ex hoc loco fugacia verba proferentis; saltem (ut vobiscum familiariter agam) si liceat aliorum ingenium æstimare de meo; qui me profiteor ita tardum, & minùs ἀσχίνον, ut multo faciliùs capere possim oculis subjecta fidelibus, quàm per infidas aurium cavernulas insinuata. Denique, quò gartiendi finem aliquando faciam, quod me spectat ipsum, multum mihi facilius esset, id quod nullo negotio præstare possem, particulares quasdam è Mathematum locupletè penu materias depromere, vel singulares nonnullas, qualium nemini non ad manum ingens prostat copia, conclusiones demonstrare, quàm in hoc Philosophico-Mathematicarum disquisitionum salo fluctuare. Non igitur hæc generalia prosequens otio quicquam meo, sed utilitati potiùs vestræ lito; non desiderio meo gratificor, at vestræ plerorunque, quantùm conjecturâ assequi possum, voluntati morem gero, facturus id semper, & eò mentis aciem intenturus, ut ingenuis vestris votis, mandatis rectiùs dixero, pro mea tenuissima virili parte satisfaciam & obtemperem. Ita causam dixi, quanquam non citatus; apologiam texui, licet à nemine quod sciam accusatus aut lacessitus; at quî meipsum violatæ fidei purgabo, promissique non præstiti, quò me velut obstrinxeram hac in Lectione de proportione disceptaturum? Ita fit, multa spondemus nobis, promittimus aliis quæ vix implendo sumus: fidem obligamus faciliùs quàm liberamus. Certè materiam istam cogitatione pererranti, tot se difficultates objectant evolvendæ, tot quæstiones eventi-

landæ, tot expendendæ diverſæ ſententiæ, vix ut in hoc exeuntis termini deliquio tantum ingredi pelagus ſuſtineam, quod præ temporis anguſtiâ emoliri & enavigare nequeam. Aliquid tamen forſan eò præludens attingam, & ſternam utcunque viam ſubtiliſſimæ materiæ enodandæ. Cúmque nihil in hac dixerim ad rem, conabor in duabus quæ ſuperſunt Lectionibus hunc defectum compenſare.

LECT. VI.

EMagnitudinum attributis poſtremas conſideravimus æqualitatem & inæqualitatem, iíſque quoad in nobis ſitum erat, genuinas notiones aſſeruimus. Illas ordine nunc excipere poſſit ratio vel proportio, quippe quæ ferè nihil eſt aliud, quàm ex quantorum comparatione reſultans æqualitatis aut inæqualitatis determinatio quædam. Cùm enim ab æqualitate, quæ ſimplex eſt & ut ita dicam unimoda, recedendo poſſint inter ſe comparabilia quanta, generaliter loquendo, modos inæqualitatis infinitos ſuſcipere, ſingularis alicujus ex his alicujus modi rebus comparatis appropriati determinatio, numeris vel aliis idoneis terminis expreſſa, dici ſolet ipſorum proportio; quâ nempe ſignificatur an ſint æqualia, vel quo certo peculiari pacto ſint inæqualia. Hoc tamen præcipuum magnitudinum ſymptoma, quo diſtinctiùs & clariùs explicatum

tum demus, expedire videtur, cùm ut, propter ſymmetriam & aſymmetriam proportionum doctrinæ neceſſariò intervenientes, nobilem illam magnitudinum affectionem Menſurabilitatem priùs exponamus, tum ut de quantorum ad comparationem aptitudine & ineptitudine (hoc eſt, de ipſorum homogeneitate & heterogeneitate) diſpiciamus aliquantillum; quibus bene perſpectis, facilius erit de proportionis natura judicium. Menſurabilitatem quod attinet, illa vel hoc nomine curioſiùs meretur expendi, quòd ex ea nomen imponatur illi, quæ circa magnitudines occupatur ſcientiæ, reliquorum Mathematum matri ac dominæ; quæ ſcilicet (etſi Platoni viſum eſt perquâ ridiculâ nomenclaturâ) Geometria conſuevit appellari (ex uſu primævo nimirum adſcito vocabulo, quia primitus ad tellurem ſolummodo dimetiendam, ac diſterminandos poſſeſſionum limites adhibebatur) meliúſque quidem Plato latiori ſubſtituto nomine μετρικὴν eam appellat, aliíque poſt eum παντομετρίας titulo donant, eò quòd omnigenas magnitudines dimetiendi rationem edocet: quanquam nec hi ſatìs illi proprium aut adæquatum nomen attribuerint, cùm hæc ſcientia non iſtam ſolam magnitudinis affectionem, at nonnullas etiam contempletur alias, quibus ad menſuram pertinens nihil intermiſcetur. Nec enim tantummodo quantæ ſunt magnitudines diſpicit illa, ſed quales etiam (hoc eſt, quâ partium diſpoſitione, quâ figurâ præditæ ſunt, num rectæ vel curvæ, planæ vel gibbæ, directæ vel inflexæ, rotundæ vel angulatæ ſunt) neque non ubi ſitæ, quam

determinatam positionem obtinent, investigat atq; demonstrat. Magnitudinum (inquam) species & similitudines æquè speculatur, ac ipsarum mensuras & proportiones. Quinimo quoad ipsam praxin, nedum magnitudines inter se metiendo comparare docet, sed & ipsas constituere, describere, transformare; ipsarum centra, diametros, tangentes reperire, nullo quantitatis respectu considerato. Unde liquet obiter, quòd Geometria perperam definitur à plerisque, *Ars vel scientia metiendi*; vel, *Scientia magnitudinis quatenus mensurabilis*; quas à censore suo traditas alicubi carpens, & corrigere præ se ferens D. Hobbius, nihilo meliorem apponit ipse, sed elaboratiùs ineptam, & planiùs eodem vitio laborantem; *Geometria* (inquit) *est scientia determinandi magnitudinem rei cujuslibet non mensuratæ, per comparationem ejus cum alia, vel aliis magnitudinibus mensuratis.* At verò sciscitor ab his nostræ scientiæ finitoribus: cùm rectam lineam vel angulum rectilineum bisecat Geometer; cùm è dato saltem puncto perpendicularem excitat aut demittit rectam, cùm per datum punctum datæ rectæ parallelam ducit, aut cùm rectam ducit quæ datam curvam contingat; cùm super data recta linea triangulum æquilaterum aut quadratum constituit; cùm per tria data puncta circulum describit, aut triangulo dato circulum circumscribit; cùm datæ circumferentiæ centrum, vel datæ conicæ sectionis focum investigat; cùm talia complura peragit, & solam magnitudinum positionem spectantia problemata resolvit, annon officio suo probè defungatur Geometra: quas tamen illic ma-

magnitudines, quoad ipsarum quantitatem comparat inter se, quam ullius mensuræ rationem habet? Nullam prorsus, at solum linearum situm determinat, & punctorum quorundam positionem inquirit. Ut præteream quòd motus æquè pensitat Geometra, quibus figuræ generantur, &c. Inadæquatæ sunt igitur & incongruæ definitiones istæ, falsis in præjudiciis fundatæ. Cognomentum ille, quisquis erat, magis appositum assignavit huic scientiæ, qui μεγεθικὴν appellandum censuit; scientiam nempe circa magnitudines versantem, quæ ipsarum omnigenas affectiones speculatur; hoc est, inquirit, invenit, demonstrat. Quæ proinde non malè describitur à Proclo; Γνωστικὴ μεγεθῶν, καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν ἑκάστοις περάτων· ἔτι τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς, καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτά, καὶ τῶν παντοίων θέσεων καὶ κινήσεων. Ita quidem; tametsi minimè diffitendum sit in hoc verti magnam hujus scientiæ partem, præcipuum ejus usum in hoc consistere, magnitudinum ut quantitates ex comparatione dignoscantur & æstimentur; hoc est, ut ipsæ quomodocunque mensurentur. Quare non segnem impendemus operam huic magnitudinis affectioni dilucidandæ. Igitur primò vocabuli mensuræ, & ex consequentiâ τῶν mensurare mensurabile, similiúmque παρωνύμων ambiguitates & πολυσημίας evolvere diligentiùs annitemur, tum quoniam id ex se jucundum sit ac utile pernoscere, tum nè tam ancipitis vocabuli significatione variâ distracti delusique (quod nonnullis accidit) in errorem prolabamur; tum ut hujus symptomatis quæ sit præcipua notio distinctiùs agnoscamus.

noſcamus. Et quidem ſi menſuræ populárem uſum ſpectemus, vix aliquod occurrat vocabulum ad plures ſignificatus detortum, quod Metaphoricos ſenſus obtineat crebriùs, aut aptiùs admittat. Ut inſtemus, viro bono recta ratio virtutíſque præſcriptum, menſura vitæ dicitur & morum, Epicureo homini τὸ ἡδὺ, avaro lucellum, ambitioſo potentia civilis & gloria; quoniam ab his hominibus ad iſtas res pleraque conſilia, ſtudia, facta diriguntur & adaptantur; conſuetudo vel opinio populi dicitur menſura decori, quoad externas rerum circumſtantias; uſus communis menſura ſeu norma ſermonis & ſignificatûs vocabulorum. Apud Ariſtote-
Top. VI. 2. lem alicubi lex deſcribitur *μέτρον τῶν δικαίων*, quia per quandam cum illa congruentiam quid ſit juſtum declaratur ac deciditur. Apud
Met. X. 1. eundem ſcientia vocatur *μέτρον τῶν πραγμάτων*, quia per illam juſti rerum limites determinantur, quomodo ſe res habent, quouſque tendunt indicatur. Taceo quòd menſura *μετρωνυμικῶς* ponatur pro ipſo judicio, ſeu facultate quâ rerum quantitas diſcernitur ac æſtimatur, ut à Cicerone, cùm ait, *Quicquid ſub aurium menſuram aliquam cadit, numerus vocatur*: hoc eſt, id cujus auris quantitatem dijudicare poteſt. Prætereo quoque, quòd perſæpe menſura pro definita rei cujuſvis quantitate legitur uſurpata. Ut in iſtis apud
Sat. XIV. Juvenalem aureis carminibus;

——*menſura tamen quæ*
Sufficiat cenſûs, ſiquis me conſulat edam:
In quantum ſitis atque fames & frigora poſcunt;
Quantum Epicure tibi parvis ſuffecit in hortis.

Quare

Quantum Socratici ceperunt ante penates.
Nunquam aliud natura, aliud sapientia dicit.

Mensura quæ sensûs; hoc est, quæ præcisa rei familiaris quantitas. ——alibi apud eundem;

——sed quæ præclara & prospera tanti, Sat. X.
Ut rebus lætis par sit mensura malorum?

Hoc est, ut incommodorum quantitas commodorum modum non excedat? Addo Lucanum;

——fuit hæc mensura timoris, Luc. III. v. 100.
Velle putant quodcunque potest——

Hoc est, tantùm extimescebant Romani, quantùm videbant Cæsarem posse; quia omnia in eos poterat, omnia sibi ab eo metuebant. Non secus accipienda Hesiodi sententia compensare præcipientis beneficia eâdem mensurâ; hoc est, eâdem quantitate, quâ acceperis, vel etiam cumulatione, αὐτῷ τῷ μέτρῳ καὶ λώιον. In sacris etiam literis aliquoties μέτρον hunc habet sensum; ut, Ὡς ἑκάστῳ ἐμέρισεν ὁ Θεὸς μέτρον πίστεως· Rom. 12. 2. hoc est, secundum fidei quam dispensavit Deus quantitatem certam & definitam. Ast infinitum sit omnes usu tritas hujus vocis acceptiones tralatitias & improprias percensere. Meretur tamen etiam ex istis una vel altera notabilior utcunque leviter attingi, Mathematicæ mensuræ notioni propiùs accedens, eíque nonnihil deserviens illustrandæ. Talis est imprimis illa, quâ mensura passim designat justam, debitam, naturæ conformem, aut rationi consentaneam cujusque rei quantitatem, quam si vel excedendo transgrediatur, aut deficiendo non attingat, habetur pro deformi, vitiosa, monstrosa; adeóque

adeóque cujus respectu virtus omnis in materia morali, in naturali pulchritudo, in artificiali decus & utilitas æstimantur. In re morali dico censetur omnis virtus (τὸ δεόν) cùm ex affectuum moderamine quodam, tum ex actuum certa mediocritate, hoc est, ex ipsorum justa debitáque quantitate, per prudentiæ, seu rectæ rationis practicæ, dictamen indigitata. Paritérque vitium in hujus quantitatis excessu vel defectu consistere videtur, nec aliud esse quàm affectuum ac operum ἀμετρία, hoc est, exorbitantia quædam, vel abnormitas à stata morum mensura. Quod in hisce virtutis & vitii formam constituit Aristoteles, ignorat nemo: disertissiméque (secus quàm aliqui censent) adsentitur Plato hisce verbis; Τί δὲ τὸ τὴν μετρίου φύσιν ὑπερβάλλον ἢ ὑπερβαλλόμενον ὑπ' αὐτῆς, ἐν λόγοις εἴτε καὶ ἐν ἔργοις, ἄρ' οὐκ ἂν λέξομεν ὡς ὄντως γιγνόμενον, ἐν ᾧ καὶ διαφέρουσι μάλιστα ἡμῶν οἵτε κακοὶ καὶ ἀγαθοὶ· hoc est, *Quod mensuræ debitæ vel mediocritatis* (τοῦ μετρίου) *naturam excedit, vel ab ea deficit, seu in verbis seu in factis, nonne dicemus id revera bonorum hominum à malis discrimen constituere?* Verba sunt τοῦ Ξένου disserentis in dialogo, qui πολιτικὸς inscribitur; cui Socrates adponit suum φαίνεται. Quo referendum illud Hesiodi, Μέτρον πᾶσιν ἄριστον, ὑπερβασίη δ' ἀλεγεινὴ. Mensura in omnibus optima, hoc est omni proposito certus terminus præfigitur, quem non est absque vitio vel culpa transilire. Quod & in istis teritur;

Est modus in rebus, sunt certi denique fines,
Quos ultra citráque nequit consistere rectum.

Polit. p. 531.

Quic-

Quicquid cum hac mensura coincidit, aut ei satis accedit μέτριον & ἔμμετρον dicitur, & in laude ponitur; quicquid discedit ac abludit ab ea, vocatur ἄμετρον & vitio verti solet. Unde passim qui suos affectus, ambitionem præsertim & animositatem, temperant & bene componunt, appellantur μέτριοι, nec ulla viri politici potior laus habetur. Sed in Ethicam nihil cogitans prolabor; abscedo, tantummodo subjiciam de voluptate cum scientia & ratione comparatis dictum Platonis; Οἶμαι γὰρ ἡδονῆς μὲν καὶ περιχαρείας οὐδὲν τῶν ὄντων πεφυκὸς ἀμετρότερον εὑρεῖν ἄν τινα, νοῦ δὲ καὶ τῆς ἐπιστήμης ἐμμετρότερον οὐδ' ἂν ἕν ποτε· *Voluptate nihil difficiliùs ad justam mensuram redigatur, scientiâ & intellectu nihil faciliùs intra debitos fines contineri possit.* In naturalibus etiam forma seu pulchritudo penes hujusmodi mensuram, hoc est, justam quandam magnitudinem, taxatur. Ita qui certam quandam staturam proceritate corporis aut crassitie giganteâ superat, aut incongruè gracilis vel curtus est; cujus aliquæ partes protuberant, aut subsidunt immodicè; cui quidvis numero vel mole deest, aut redundat indebitè, dicitur ἄμετρον, & deforme vel monstrosum existimatur. In artificialibus etiam quadantenus è tali mensura dijudicatur τὸ πρέπον & τὸ συμφέρον. Nec enim aliò ferè collineant artes unæquæque, quàm ut justam quandam rebus circa quas occupantur quantitatem conferant, destinatis quibusdam usibus aut apparentiis accommodatam. Unde Plato cunctas artes τῆς μετρητικῆς portiones constituit, & suos ad τὸ μέτριον conatus dirigere docet, quod assequentes opera sua bona

Phileb. p. 405.

In Politico.

bona atque pulchra efficiunt: Τὸ μέτρειον σώζουσαι πάντα ἀγαθὰ, καὶ καλὰ ἀπεργάζονται. Iterum, Μετρήσεως μὲν γὰρ δή τινα τρόπον πάνθ' ὁπόσα ἔντεχνα μελείληφεν. Ahuc expressiùs, Δηλονότι διαιροῖμεν ἂν τὴν μετρητικὴν ταύτῃ δίχα τέμνοντες· ἓν μὲν τιθέντες αὐτῆς μόριον συμπάσας τέχνας, ὁπόσαι τὴν ἀριθμὸν, καὶ μήκη, καὶ βάθη, καὶ πλάτη, καὶ ταχυτῆτας πρὸς τοὐνάντιον μετροῦσι, τὸ δ' ἕτερον, ὁπόσαι πρὸς τὸ μέτριον, καὶ τὸ πρέπον, καὶ τὴν καιρὸν, καὶ πάνθ' ὁπόσα εἰς τὸ μέσον ἀπωκίσθη ἀπὸ τῶν ἐσχάτων· hoc est, *Ars dimetiendi (vel mensoria) bisecanda est hoc pacto; ut una pars ejus complectatur omnes artes, quæ numeros, longitudines, profunditates, latitudines, & velocitates contendunt inter se; alia verò reliquas, quæ respiciunt id quod moderatum, decens, opportunum est, & quæcunq; devitatis extremis ad medium nituntur.* Sed de hac acceptione populari modū excessimus. Ei tamen affinem alteram perstringemus; juxta quam mensura designat aliquod statum, communiter agnitum & probatum, sensibus expositum, aut intellectu comprehensum exemplar, ad quod reliquorum in eo genere quantitates aut valores examinari debent aut solent. Ejusmodi mensura duplex est, naturalis & arbitraria. Arbitraria, quales illæ, quas authoritas publica proponit (vasa, pondera, regulæ) ex conformitate vel congruentia, cum quibus reliquæ mensuræ jus suum, nomen, & rationem mensuræ mutuantur; nec aliter mensuræ sunt, nisi quatenus cum istis prototypis consentiunt. Mensura verò cujusque rei naturalis est id quod primum & perfectissimum est in illo genere: quomodo divina natura bonitatis & sapien-

tiæ

tiæ menſura eſt, quia Deus primariò bonus & ſapiens eſt, αὐτάγαθος καὶ αὐτόσοφος· & eatenus aliæ res bonitatis ac ſapientiæ participes ſunt, quatenus cum divina bonitate conveniunt, & ei aſſimulantur. Talem unaquæque res, ex mente Platonis, menſuram habet, idæam ſui æternam ac indefectibilem; exemplar nempe quoddam exactiſſimum, è ſimilitudine vel correſpondentia cum quo vera, pulchra, perfecta cenſetur; & à quo ſi vel hilum diſcordet, eouſque vitioſa eſt, turpis, & imperfecta. Certè ſub finem Philebi res inter primas & ſempiternas τὸ μέτρον primo loco digerit; Πάντη (inquit) φήσεις, ὦ Πρώταρχε, ὑπό τε ἀγγέλων πέμπων, καὶ παρὼν φράζων, ὡς ἡδονὴ κτῆμα οὐκ ἔστι πρῶτον, οὐδ' ἂν δεύτερον ἀλλὰ πρῶτον μέν τι περὶ μέτρον, καὶ τὸ μέτριον, καὶ τὸ καίριον, καὶ πάντα ὁπόσα τοιαῦτα χρὴ νομίζειν τὴν αἰδιον εἰληχέναι φύσιν· hoc eſt, *Prædicabis omnibus, ô Protarche, cùm aliò nuncios dimittens, tum præſentibus eloquens ipſe, quòd voluptas ſit res nec in primo nec in ſecundo cenſu ponenda, ſed primum dicè circa menſuram, & menſuræ congruum & opportunum, & quæcunque talia ſempiternam ſortita naturam putare decet.* Ubi per μέτρον intelligere videtur τὸ αὐτόμετρον, primævam cujuſque rei idæam: verùm in his contero tempus. A popularibus iſtis accedamus ad menſuræ ſignificatus à Mathematicis frequentatos; qui ſanè multiplices quoque ſunt, & à nobis gradatim exponentur, à latioribus ad ſtrictiores procedendo. Convenit autem aliquatenus his omnibus, quam tradit Ariſtoteles, menſuræ definitio ſeu deſcriptio; Μέτρον ἐστιν ᾧ τὸ ποσὸν γνώσκεται, *Met. X. 1.*

Men-

Menſura eſt quâ rei quantitas dignoſcetur. At cùm diverſimodè ſecundùm varios gradus & reſpectus apprehendatur hæc quantitatis cognitio, menſuræ conſequenter nomen aut latiùs extenditur, aut arctiùs reſtringitur.

1. Et quidem primò, menſura ſæpè ponitur pro re quapiam, quæ alterius quantitatem utcunque monſtret & notificet; nec aliud denotat, quàm argumentum certum, ſeu ſignum, indubitatum κριτήριον aut τεκμήριον alicujus determinatæ quantitatis. Sic arcus circuli ex angulari puncto ut centro deſcripti, angulique rectilinei cruribus interceptus. Et in ſphæricis, arcus circuli angulari puncto ceu polo deſcripti, angulique ſphærici lateribus interjectus; eſt menſura dicti utriuſvis anguli rectilinei vel ſphærici: quia ſi per organicam dimenſionem, vel aliter quomodocunque dignoſcatur illius arcûs quantitas (hoc eſt, quæ pars ſit, aut quam rationem habeat ad integram circuli circumferentiam, vel ad ejus quadrantem) inde conſequenter agnoſcetur quantus ſit dictus angulus, hoc eſt, quæ pars ſit, aut quam habeat proportionem ad quatuor angulos rectos, vel ad unum rectum. Nec minùs propriè viciſſim angulus, in centro vel polo circuli verticem habens, dici poterit arcûs circularis menſura, quatenus iſte per hypotheſin aut diſcurſum agnitam habens ad quatuor rectos proportionem arcûs, intercepti rationem indicabit ad totam circumferentiam. (Nam crudè non nemo perperámque dicit arcum interceptum eſſe propriam anguli quantitatem; cùm non magis arcus anguli, quàm angulus ipſius arcûs quantitas ſit;

imò

imò non magis hic quàm ille menſura ſit, vel ex parte rei, vel ex uſu communi; cùm ipſorum quantitates proportionaliter incedentes coordinentur, connectantur neceſſariò, ſe reciprocè prodant & indigitent. Eâdémque ratione ſectores circulares angulorum, & permutatim illorum hi menſuræ nominentur. Porro, hoc modo nedum magnitudo ſpatii, ſpatium motûs ac temporis; at viciſſim quoque motus & tempus ſpatii, ſpatium magnitudinis menſuræ dicuntur; quatenus à ſpatio prius agnito magnitudinis ipſum occupantis quantitas innoteſcat; à motu vel tempore prædeterminatis ſpatii percurſi quantitas indicetur. Ut ſi ſciatur quantum temporis effluxerit ab ortu Solis, indè colligamus quantam interea paralleli ſui peripheriam Sol pervaſerit. Quam in menſuræ ratione ſpatii, temporis, & motûs permutationem exertè notavit Ariſtoteles; Οὐ μόνον (inquit) τῷ κίνησιν τῷ χρόνῳ μετρεῖν, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει τὸ χρόνον, διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ἀπ' ἀλλήλων· μετροῦμεν τὸ μέγεθος τῇ κινήσει, καὶ τῷ κίνησιν τῷ μεγέθει· πολλαχῶς δὲ φαμὲν τῷ ὁδὸν, ἔν τε ἡ πορεία πολλὴ, καὶ ταυτῷ πολλαχῶ, ἂν ἡ ὁδὸς ἦ πολλὴ, καὶ τὸ χρόνον ἂν ἡ κίνησις, καὶ τῷ κίνησιν ἂν ὁ χρόνος. Ad hæc, ut exempla congeramus, teli vel lapidis jactus juxta modum hunc, licèt imperfectiùs, menſura ſit ſpatii; quatenus ſi notæ ſint, per antecedens experimentum, projicientis vires, inde ſciatur quantum inter ejus ſtationem & miſſilis caſum protendatur intervalli. Imò cùm unaquæque res, agens quodvis naturale, definitam habeat activitatis ſuæ ſphæram, poteſt aliquatenus *Phyſ. IV.* 18.

quatenus tale quidvis menſuræ deſungi officio. Cùm videlicet ignis ad certum intervallum calefaciendi vim exerat, ultra nil efficere ſentiatur; floſculus, aut odoratum quodvis, aliquouſque motivos olfactûs vapores diſpergat, objectum viſibile conſpiciatur è certa diſtantia, ad longinquiorem diſpareat; vocis ſonus percipiatur ab auribus intra præfinitum terminum collocatis, ultra quem inſenſibilis eſt; ſi prius ab experientia ſingulari conſtiterit, quantus ſit hujus cujuſque ſphæræ (ſphæræ dico activitatis) radius, inde de iſtis interſtitiis feratur aliquale judicium; hoc eſt, iſtarum virium quantitates exploratæ fient ſpatiorum quodammodo menſuræ. Ita ſaltem vulgatum eſt, ex æſtimato ſpatio quod deſignato quolibet tempore conficere poſſit ἔυζωνος vir, locorum diſtantias ab hiſtoricis computari; neque non quod ex tempore velificationis ab æquabili vento peractæ maris tractus, & portuum interſtitia dijudicent nautæ. Ex perpendiculi verò ſuſpenſi recurſibus ἰσοχρόνοις dinumeratis perquam accuratè tempus metiuntur Aſtronomi. Umbra quoque (quantumvis obſcura, tenuis, & ferè nulla res) multis nominibus hujuſmodi menſuræ rationem ſubit: ejus motus in horologiis ſciotericis temporis quantitatem enunciat; ejus in pariete ſuſceptæ magnitudo Solis apparentem magnitudinem arguit; illa demum in Eclipſibus dimetiendæ veræ Solis magnitudini deſervit. Ita nulla fermè res non hujuſmodi menſuræ vicem obeat, aut eam æmuletur; & (quod præcipuè notandum) res genere diverſiſſimæ ſibi mutuò poſſint

poſſint eſſe menſuræ, juxta latitudinem hujus acceptionis. Aliquanto ſtrictiùs autem ſecundò, menſura dicitur id, cujus ex quantitate neceſſariò dependet notitia quantitatis, quâ præditum eſt menſurabile; adeò ut hujus quantitas non aliter, quàm ex illa præcognita poſſit innoteſcere. Qualis quidem reſpectu præcedentis jamjam expoſitæ dici poſſit menſura naturalis, & à priori; quia non adeò deſumitur arbitrariè, ſed neceſſario requiritur, & ab ipſa natura ſuggeritur, ad dimetiendæ rei quantitatem inveſtigandam. Ita magnitudo eſt menſura ſpatii, quia ſpatii quantitas aliter comprehendi nequit, quàm magnitudinem aliquam realem ei inſiſtentem dimetiendo, vel utcunque ſufficienter æſtimando. Spatium verò talis eſt menſura motûs & temporis. Spatium (inquam) ab aliquo notabili cum certa velocitate æquabiliter toto mobili decurſum eſt menſura temporis (mediatè ſaltem, motûs interventu) nec enim aliter dignoſci poteſt, quantum effluxerit temporis, niſi talis ſpatii quantitatem æſtimando. Arcus e.g. circuli æquinoctialis duos inter meridianos per ortivum Solis punctum in horizonte, pérque Solis centrum tranſeuntes interceptus eſt menſura naturalis & genuina temporis, ab ortu Solis ad datum inſtans elapſi. Et arcus in Solis eccentrico, (juxta Ptolemæi doctrinam) eſt talis menſura temporis annui, quod inſumptum eſt, dum Sol iſtum arcum pertranſivit. Similiter velocitatis, quâ fertur uniformiter aliquid mobile, menſura eſt ſpatium deſignato tempore peractum; hinc enim certam conjecturam faciemus, 2.

quantum ſpatii permeabit id mobile quolibet alio determinato tempore; nec alio modo quanta ſit illa velocitas poterimus expiſcari. Sed adhuc ſtrictiori modo, tertio, menſura dicitur id, quod propter eximiam quandam determinationem, aut ſimplicitatem, aut notabilitatem, aut facillimam comprehenſionem, aptiſſime poterit adhiberi ad rerum modos determinandos, aut quantitates inter ſe comparandas. Ita cùm inter duo loca vel puncta deſignata protendantur infinitæ curvæ vel indirectæ lineares orbitæ, penes quas ipſarum diſtantiæ cenſeantur, recta tamen linea propter unitatem & ſimplicitatem ſuam intervallum illud metiri dicitur. Et cùm à dato puncto ad datam poſitione rectam lineam innumeræ duci poſſint inæquales rectæ lineæ, tamen illius ab ea diſtantiam menſurare dicitur recta perpendicularis, quia ſimplex eſt & unica. Propter eandem cauſam diſtantia rectæ in circulo ſubtenſæ, vel circuli minoris in ſphæra à centro circuli vel ſphæræ, penes perpendicularem æſtimatur à centro ductæ ad ſubtenſam, vel ad dicti circuli minoris planum demiſſæ. Paríque ratione diſtantia rectarum parallelarum à ſe invicem menſuratur à perpendiculari recta qualibet iis intercepta, diſtantia verò peripheriarum concentricarum à radii cujuſvis è communi centro trajecti intercepta portione taxatur: quia ſemper hæc unius eſt quantitatis. Sic & apud Apollonium in quinto Conicorum, recta linea vertici & puncto in diametro ſignato interjecta nuncupatur ab ipſo (ſaltem ab Arabe qui libros iſtos interpolavit) menſura; quia nulla ſuccurrit

currit aliorum ramorum quantitati determinandæ ſimplicior aut major. Non abſimili ferè ratione, quoniam inter ſuperficies maximè ſimplex & uniformis eſt ſuperficies plana; inter planas verò figuras præcipue comprehenſibilis eſt illa, quæ rectis lineis includitur; inter rectilineas autem figuras ſimplex, unimoda, facilliméque notabilis eſt quadratum; ideo quadratum dicitur & haberi ſolet menſura figurarum ſuperficialium, & quoad fieri poteſt ad hoc illorum quantitates referuntur. Eadem in ſolidis eſt cubi ratio; ad quem propter ejus manifeſtam determinationem, & bene conceptibilem naturæ proprietatem, aliorum ſolidorum quantitates exiguntur. In angulis vero rectilineis, menſuræ ſic acceptæ rationem ſubit angulus rectus, quia reliquis aliquo pacto notabilior, & peculiari nomine gaudens, & ſimpliciorem lineæ inſiſtentis ad illam, cui inſiſtit, reſpectum includere videtur. Ita denique lineas omnes, curvas atque compoſitas, ad ſimpliciſſimam omnium rectam lineam revocare conantur Geometræ, earúmque quantitates ex aliqua, quam ad hanc obtinent, relatione determinare. In aliis quantis eadem obſervatur ratio. Nam quia cœli (vel ex hypotheſi jam receptiore telluris) diurna revolutio motuum maximè conſtans, uniformis, & notabilis eſt; ideo reliquorum in motuum, temporum, & velocitatum menſuram adſumitur ac adhibetur. Et ad auri (graviſſimíque corporis, eatenúſque præſertim determinati, vel ad olei præ cæteris leviſſimi) quantitatem aliorum ponderum quantitates rediguntur à Staticæ magiſtris.

Et in alio quovis genere quanti, commoditatis gratiâ, tale quid adiciscitur in mensuram, simplicitate suâ vel mobilitate præluſtre. 4. Sed ad noſtram rem propius quartò, menſura dici ſolet aliquid ut nobis notius, aut quomodocunque determinatius in medium profertur, aſſumitur, exponitur hâc intentione, ut alia quanta conſiderationi ſubjecta cum eo, vel eo mediante inter ſe ſecundùm quantitatem comparentur; ſcilicet ut inveſtigetur quoties hoc illa continet, vel in illis continetur, aut utcunque proportionem illa ſortiuntur ad hoc, & ex conſequentia quomodo referantur ad ſe mutuò, ac ita quantitates ipſorum priùs ignotæ & indeterminatæ dignoſcantur ac determinentur aliquatenus. Ita pes, palmus, ulna, cubitus, orgya; cyathus, ſextarium, modius; reliquæque quarum apud vulgus nomina certam longitudinem aut capacitatem innuunt, magnitudines ſunt ideo menſuræ, quoniam nota communiter, & ex pacto definita ſupponitur ipſorum quantitas; unde per comparationem cum iſtis (ex congruentia vel idoneo diſcurſu) de aliarum ignotarum & indeterminatarum magnitudinum definita quantitate judicetur. Sic & cùm chordarum circuli peripheriis ſubtenſarum quantitas requiritur, aut regularium inſcriptarum circulo figurarum latera quanta ſint inveniendum proponitur, aſſumi ſolet in menſuram circuli radius, ut linearum omnium in circulo notiſſima, penitúſque determinata, ínque partes aliquot æquales, tot quot ex uſu viſum fuerit, diviſus ſupponitur, tum quot ex iſtis particulis ſingulæ chordæ, vel ſingulo cuique la-

lateri cedere debent, adhibito Geometricorum theorematum ſubſidio, vel quacunque legitimâ ratione exquiritur & computatur. Vel utcunque per aptam ratiocinationem inquiritur æquatio aliqua, quæ dictarum ſubtenſarum aut laterum ad circuli radium relatio notificari vel exprimi poſſit. Vel denique, ſi fieri poteſt, ipſa chorda, ſeu latus illud quæſitum, actu ducitur & delineatur, ut æſtimetur ex comparatione ſenſibili, vel per organicam commenſurationem dignoſcatur ejus ad radium proportio. Vel ſaltem aliæ duæ lineæ exhibentur, quarum proportio ſit eadem cum proportione dictæ lineæ ad radium; quarúmque proinde quovis modo comperta ratio quæſitam rationem indicabit. Etenim variis hiſce modis quantitatum dimenſio peragatur, & propoſitæ quantitatis ad nobis cognitam, aut natura determinatam ratio exprimi, & æſtimari poſſit. Per numeros ſcilicet, aut per æquationem aliquam, aut per æſtimationem ſenſibilem, ex ipſis iiſdem terminis immediate, vel ex aliis analogis ad ſenſum expoſitis; quorum etiam dimenſio, idoneis organis explorata, numericam proportionem exhibebit. Sed hæc aliàs pleniùs & diſtinctiùs explicanda ſunt. Ut ad exempla redeam: Simili modo, pro dictarum reliquarum figurarum areis, quantæ ſint, inveniendis, adhibetur quadratum radii vel diametri, ceu menſura quacum conferantur. Neque non ſimiliter in corporum regularium lateribus, ſuperficiebus, ſoliditatibus æſtimandis & comparandis inter ſe, ſphæræ cui includi vel inſcribi poſſunt, radius accipitur; & cum eo,

vel cum ejus quadrato, vel cum ejus cubo contenduntur ista, quo reperiatur, & in censum reponatur eorum mutua proportio. Sic & communiter ab Astronomis astrorum veras inter se distantias, & veras magnitudines indagantibus adhibetur terræ semidiameter, ut communis mensura quædam, ad quam illarum quantitates exigantur. Ut cùm Luna tot semidiametris terrestribus à telluris centro distare, diameter ejus tot ejusdem semidiametri partes aliquotas exæquare perhibetur. Paríque modo de reliquis. Neque quod notandum obiter prosequentibus, refert omnino in hac acceptione mensuræ, utrum magnitudo mensuræ vicem sustinens sit major an minor illà, quæ mensuratur: ut in suprapositis exemplis radius minor est chordâ graduum 120, vel latere trianguli regularis circulo inscripti, sed major chordâ graduum 36. vel latere decagoni, itidem circulo inscripti. Et semidiameter terræ major est semidiametro Lunæ, sed Lunæ distantiâ longè minor. Item assumpto passu Geometrico, per eam æquè comparando dignoscatur, quanta sit longitudo pedalem æquans, ac alia major stadio vel miliari par. Ut neque respicitur hîc utrum collata quanta taliter inter se, vel ad expositam afficiantur mensuram, ut ipsorum proportio numeris exprimi possit; hoc enim modo magnitudines omnes (licèt ipsarum quarundam proportio sit in numeris ineffabilis) sunt inter se commensurabiles; hoc est, ipsarum una designari poterit, ad quam aliarum quantitates referantur, atque per eam mensurentur. Ut radii ad chordam graduum 90, vel latus qua-

quadrati circulo inſcripti, ratio nullis numeris explicari poteſt præcise, tamen hujus quantitas cum illius quantitate comparari poteſt, & eatenus illæ commenſurantur. Hæc, inquam, adnoto propter illam quæ ſubſequitur, Mathematicis peculiarem, & in uſu frequentiſſimo poſitam acceptionem menſuræ, juxta quam quinto, menſura ſtrictiùs accipitur pro magnitudine, quæ aliam aliquoties ſumpta conſtituit & componit; vel quæ ab alia aliquoties ſublata nihil linquit reſidui, ſed eam penitus exhaurit. Per aliquoties intelligendum ſemel, aut aliquot vicibus, ſecundùm unitatem, aut aliquem determinatum numerum; unde conſtat quòd menſura ſic accepta nunquam excedet rem menſuratam, at vel æquatur ei, vel ejus pars eſt, quæ dici ſolet aliquota, hoc eſt, quæ aliquoties, juxta numerum quemvis, repetita totum componit; vel qualium aliquot totum conſtituunt & adæquant; vel quæ vicibus aliquot abſtracta nihil è toto relinquit. Ita pes eſt menſura paſſûs Geometrici, paſſus iſte ſtadii, ſtadius milliaris & leucæ, quia pes quinquies acceptus paſſum Geometricum efficit, quinquies eum ſubductus perimit. Paſſus verò centies vigeſies quinquies acceptus ſtadium, ſtadius octies ſumptus complet miliare. Sic & minutus horam, hora diem, dies menſem civilem, menſis civilis annum civilem metiuntur. At non hoc modo dies menſem, aut annum naturalem; nec menſis annum naturalem menſurant. Quia dies 365 deficiunt ab anno naturali, 366 eum exuperant: paritérque de reliquis. Hoc autem modo ſemper in elementis intelligun- 5.

tur menſuræ, eíque παρωνύμων vocabula; (licèt iſthic, quod non nemini mirum videtur, nulla proſtet menſuræ definitio) ut cùm initio V. elementi definitur pars (aliquota) Μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον· *Magnitudo magnitudinis, minor majoris, pars eſt, quum majorem ipſa demetiatur.* Hoc eſt, cùm aliquoties accepta totum ſic exhaurit, ut plane nihil ſuperſit. Id enim ibi deſignat καταμετρεῖν, demenſurare, vel penitus emetiri. Ut & ſimplex μετρεῖν idem denotat paſſim; & clariſſimè initio decimi, ubi definiuntur magnitudines commenſurabiles, (σύμμετρα μεγέθη) τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα· hoc eſt, Quarum utrumq; eadem quædam magnitudo aliquoties ſumpta conſtituat, aliquoties adempta tollat. Semper, inquam, per μέτρησιν innuitur perfecta diviſio, vel ſubtractio talis, ſimplex an multiplex, cui nullum ſuperſit reſiduum. Ita quoque vocabulum hoc uſurpare videtur Philoſophus, illa proferens verba; Παρὰ γὰρ τὸ μετρῆν οὐδὲν ἄλλο παρεμφαίνει τὸ μετρούμενον, ἀλλ' ἢ πλείω μέτρα, τὸ ὅλον· hoc eſt. *Præter menſuram aliquoties acceptam nihil inſuper videtur eſſe totum quod menſuretur.* Unam adhuc ſtrictiſſimam acceptiunculam ſuppeditat Ariſtoteles in Metaphyſicis, juxta quam menſura deſignat id quod in unoquoque genere primum, minimum, ad ſenſum indiviſibile (vel in uſu minimè diviſum) aliorum dignoſcendæ quantitati conſuevit adhiberi. Quomodo nimirum in numeris unitas, in ponderibus granum, in temporibus minutum, in nummis τὸ λεπτόν, in ſonorum intervallis dieſis, in lineis

Phyſ. IV. 20.

Met. X. 1.

lineis pollex (apud Græcos longitudo pedalis, adteſtante Philoſopho, ἐν ταῖς γραμμαῖς (inquit) χεὼν, ὡς ἀτόμῳ τῇ ποδιαίᾳ.) menſuræ ſunt καὶ ἐξοχὼ. Verum hæc perſequi non vacat. Ut neque jam attexere licet, quænam è dictis præcipua ſit, & maximè propria notio vel acceptio, juxta quam intelligi debet quod præ manibus habemus ſymptoma magnitudinis, Menſurabilitas. Ut & alia complura ſilentio jam comprimenda ſunt. Tempus enim monet ut receptui canam, & vereor ne quis præ cæteris ingenioſus obvio me diaſyrmo feriat, & de menſura fermocinantem aſſerat ad ſermonis menſuram parum attendiſſe.

LECT. VII.

POſtremâ Lectione diverſas uſu tritas vocabuli menſuræ acceptiones haud indiligenter exponere conati ſumus. Eque dictis facilè liqueat, quot accipiantur modis vocabula paronyma. Menſurare. Menſurabile, &c. quot enim modis menſura, totidem illa ſumantur reſpectivè. Reſtat ut juxtà quem præcipuè modum, quod præ manibus eſt ſymptoma magnitudinis, Menſurabilitas, intelligi debet, & quæ ſit ejus primaria notio deſpiciamus. Ad hoc ex iis duo modi Mathematicis familiares, à nobis potiſſimùm conſiderandi ſunt, cautéque diſtinguendi, ad quos omnes alii referantur. Primus latior eſt, at maximè proprius, à quo nempe Geo-

metria,

metria, ſicut oſtendemus, nomen deſumpſit, & quem ex officio ſuo præcipuè reſpicit; juxta quem menſurare ſignificat alicujus magnitudinis quantitatem notificare vel determinare, reſpectu magnitudinis alterius homogeneæ, nobis utcunque magìs notæ, vel utcunque determinatæ, declarando ſcilicet, exhibendo, repræſentando numeris, aut alio modo comprehenſibili proportionem ejus cum hoc; ſignificando nempe quota pars illa ſit hujus, vel quomodo multiplex, quóve pacto ſit inæqualis, quanto excedat, aut quouſque deficiat, vel adſimili quopiam modo. E.g. propoſitâ quâvis longitudine, nobis hactenus ignotâ, ſi quovis modo (ſeu operationem organicam, ſeu per mentale ratiocinium, legitimis hypotheſibus, aut prædemonſtratis concluſionibus innixum) ſi quovis, inquam, rationi conſentaneo pacto reperiamus quæ ſit ejus ad expoſitam quamvis, à nobis bene comprehenſam (puta pedalem) longitudinem in quantitate relatio, quoties illam continet, aut continetur in ea, quanto ſemel aut aliquoties accepta ſuperat illam, vel ab illa deficiat; num habet ſe ad illam, ſicut numerus quiſpiam ad alium; vel ſicut aliqua recta linea, quam exhibere poſſum ad aliam, quam etiam poſſum efficere; vel ut radix alicujus æquationis, quæ analyticæ ſubdatur ἐξηγήσει, & per artem quomodocunque reſolvi poſſit; tunc eam menſurare dicamur longitudinem. Qualis rectarum longitudinum dimenſio nuncupatur μηκομετρία vel εὐθυμετρία (hybridis autem ſubinde vocabulis, Longimetria & Altimetria). Similiter propoſitâ quâvis figurâ planâ; cùm

quæ

quæ ſit ejus ad exhibitam aliam figuram planam, pedem videlicet quadratum, proportio colligimus, & numeris aut alio modo repræſentamus, illam habemur dimenſi; cujuſmodi planorum dimenſio dicetur ἐμπεδομετρία, vulgò barbaréque Planimetria. Pari ratione, cùm ſolidum aliquod cum pede cubico, vel cum tanto talíque cylindro, vel cum alio probe cognito quovis corpore conferentes, ejus ad hanc rationem expiſcamur, στερεομετρεῖν dicimur. Item, ejuſmodi comparatio laterum & angulorum alicujus trianguli, per quam è notis in eo quibuſdam lateribus aut angulis aliorum angulorum ad rectum angulum ratio, vel aliorum laterum ad unum deſignatum, & aliunde notum proportio comperiatur, appellatur Trigonometria. Cúmque peripheriam inter & diametrum circuli (nec non inter aream circularem, & diametri quadratum) quænam intercidat proportio, quoad poſſumus exactè conamur definire, tunc operam damus τῇ κυκλομετρίᾳ. Quibus ab exemplis, in id conſultò prolatis, illud conſtat quod dixi, menſurationis hanc maximè genuinam & primariam eſſe notionem, cùm circa illam præcipuæ Matheſeos partes potiſſimùm occupentur, & ab ea conſequenter denominationem accipiant. Unde penes hanc cenſeri debet affectio magnitudinis, diſquiſitioni noſtræ ſubjecta, quam menſurabilitatem appellamus (Græcè μέτρησιν· magis ambiguo, & cum actu potentiam confundente vocabulo) quæ nihil denotat aliud, quàm magnitudinem cum aliis ejuſdem generis magnitudinibus comparari poſſe, ſic ut ejus, alioquin ignotæ

notæ & indeterminatæ, quantitas ex relatione, quam ad illas aliquam ſortitur, utcunque dignoſci poſſit & determinari. Hoc enim omnicunque magnitudini connatum & eſſentialiter connexum eſt, quatenus omnis magnitudo cuivis alteri magnitudini homogeneæ (linea lineæ, ſuperficies ſuperficiei, ſolidum ſolido) neceſſariò vel æqualis eſt, vel inæqualis aliquo certo modo, qui modus ex parte rei noſcibilis eſt & determinabilis ex ſe, tametſi perſæpe difficulter acquiratur ejus notitia, nec interdum ullo modo queat à nobis accuratè comprehendi. Nec ſoli magnitudini convenit hæc affectio, ſed (quale quid in aliis affectionibus ſigillatim oſtendimus) etiam aliis quibuſcunque quantis (motibus, temporibus, velocitatibus, ponderibus) ἀναλόγως & ſuo modo; quatenus ipſorum mutua proportio determinari, exhiberi, exprimi poteſt, adeóque quantitas unius ex relatione quam habet ad notam alterius quantitatem indicari. Tempus e. g. metimur, quum oſtendimus illud tot diebus, horis, minutis æquari, vel ad notum aliud tempus ſic habere, ſicut iſta recta linea, vel iſta circuli peripheria ad hanc, quarum ſcilicet inter ſe proportionem cognoſcimus: velocitatem, quando commonſtramus in tempore talem habente proportionem ad aliquod aliunde notum tempus, ſpatium reſpectu ſpatii cogniti tantum peragi; hoc eſt, ipſam ad notam velocitatem habere proportionem cognitam. Pondus denique menſuramus, cùm perſpectum habemus, quantam compertæ gravitatis magnitudinem elevare poterit aut ſuſtinere, hoc eſt, quam rationem habet

ad

ad aliud cognitum pondus. Paritérque reliquis in quantis ſeſe res habet. Sed ut hujus ſymptomatis adhuc dilucidiùs innoteſcat, de talis menſuræ proprietatibus quibuſdam, & de magnitudines dimetiendi modo nonnulla ſubjungemus. Prima menſuræ, qua- 1.
lem jam innuimus, proprietas eſt, ut ſit homogenea rei menſuratæ; hoc eſt, ut cum ea ſecundùm congruentiam & diſcongruentiam, æqualitatem & inæqualitatem, exceſſum & defectum, additionem atque ſubductionem, juxta rationem denique ſeu proportionem comparari poſſit; linea nempe lineæ, ſuperficies ſuperficiei, corpus ſolidum corporis, tempus temporis, velocitas velocitatis, pondus ponderis menſura poteſt eſſe; ſed linea ſuperficiei, ſuperficies corporis, magnitudo temporis, tempus ponderis menſuræ nequeunt eſſe, ſecundùm hanc accuratiorem menſuræ acceptionem. Laxior illa quidem & ἀκυρότερον antehac ſatis declarata menſuræ notio, juxta quam quicquid alterius arguit, indicat, aut quomodocunque notificat quantitatem eam menſurare dicitur, etiam heterogeneis quantis competere poteſt, iſtíſque non rarò tribuitur & applicatur à Mathematicis: eóque modo linea temporis, ſuperficies velocitatis, corpus ponderis; reciprocéque tempus lineæ, velocitas ſuperficiei, pondus corporis menſuræ nuncupari poſſunt ac ſolent. Attamen ſolicitâ circumſpectione diſtinguendæ ſunt acceptiones iſtæ, nè cum D. Hobbio (diſtinctionem iſtam, ſeu ambiguitatem hujuſce vocabuli, non obſervante, vel minùs expendente) multiplices in labyrinthos difficultatum ac errorum improviſò ruamus.

ruamus. Quales ſunt, quòd linea ad tempus (paríque ratione ſuperficies ad velocitatem, ſolida magnitudo ad pondus) proportionem habent: (quia nempe linea tempus, ſuperficies velocitatem, magnitudo ſolida pondus aliquo modo metiuntur). Quòd eædem ſunt omnium rerum quantitates, vel quòd omnium quantitates mutuò ſunt homogeneæ; quoniam omnes iiſdem menſuris, lineis ſcilicet & numeris ſubjiciuntur. Denique quòd unum quantum cujuſvis alterius quantitas ſit, linea videlicet temporis, velocitatis, ponderis, imò ſuperficiei & corporis quantitas ſit, quia menſuræ vice fungens illorum determinat quantitatem. Quæ abſurditatum portenta non ex alio, quam ex hujus non animadverſæ diſtinctionis fonte promanâſſe videntur. Quod ut breviter inſtando commonſtremus; cùm is ſibi præſtraviſſet hanc menſuræ definitionem, menſura eſt magnitudo magnitudinis, una alterius, quando ipſa, vel illius multipla, alteri applicata cum ea coincidit; ſubnotâſſet autem præterea, lineam motu tranſactam appellari ſubinde menſuram temporis, hinc ei proclive fuit colligere, lineam aliquando tempori coincidere, adeóque tempori æquari, vel inæquale eſſe, & proinde lineam ac tempus mutuam inter ſe proportionem ſortiri, non ſecus quàm linea proportione refertur ad lineam. At verò, ſi in animum induxiſſet cogitare, cùm linea dicitur menſura temporis, non ſtrictè ſumi menſuram pro quanto, quocum tempus ſecundùm quantitatem comparatur (nedum non pro parte juxta propriam ipſius definitionem aliquota) ſed laxiùs,

pro

pro qualicunque indicio vel argumento quantitatis tempori competentis; ad hoc, inquam, ſi contigiſſet illi mentem ſuam tantillùm intendiſſe, non ita temerè commiſcuiſſet, & confudiſſet inter ſe res toto cœlo diſſitas diverſaſque. Sed hæc alibi penitiùs diſcutienda ſunt, cùm de quantis homogeneis & heterogeneis ex compoſito diſſeremus. Interim unicum adjiciam huc faciens, animadverſione dignum, ideò tantùm heterogenea quanta nonnunquam dici altera alterorum menſuras, quoniam homogenearum menſurarum notitiam utcunque quendam ſubminiſtrant. E.g. propoſitus arcus æquatoris, horizontem inter & ſolem in æquatore poſitum interceptus, menſura temporis diurni præterlapſi propterea dicitur, quoniam aliunde cognitus ipſe per ſuam proportionem ad totam æquatoris circumferentiam temporis iſtius rationem coarguit ad tempus integrum diurnum: hoc eſt, inſervit ejus ad propriam homogeneam menſuram comparationi. Sic & linea decurſa velocitatis menſura dicitur eatenus, quatenus innuit quæ ſit hujus ad alteram præconceptam velocitatem ratio. Nec aliter ſe res habet in aliis impropriè dictis menſuris: unde ſatis liquidò patet id quòd inſinuatum eſt modò, quòdque ſit operæ pretium conſiderare, reliquas expoſitas menſuræ acceptiones hanc reſpicere, vel ab hac deſumi. Porro ſecundò, 2.
altera menſuræ, qualem jam perſequimur, proprietas eſt, & ad illius rationem requiritur, ut quantitatem ipſa determinatam habeat, hoc eſt unicam, eandem, certam, ſibi conſtantem & invariatam quantitatem; ut

ſit,

sit, quod in Metaphysicis innuit Aristoteles, Met. X. 1. ἓν καὶ ἀδιαίρετον, nullam differentiam aut latitudinem admittat, aut quantitatem habeat immotam, & velut in puncto constitutam. Alioquin per comparationem cum ipsa mensuratæ rei justa quantitas æstimari non poterit; at non minus adhuc incerta, indeterminata, ignota permanebit. Unde quicquid anceps significatu, vel naturâ varium est, eatenus mensuræ respuit officium. E.g. pes, pro humani pedis modulo; palmus aut cubitus (itidem humanus) miliare sumptum ἀπολύτως (non adponendo Germanicum, Italicum, Anglicum) & quælibet talia non sunt rigidè loquendo mensuræ; quoniam inter Herculis clavigeri, telumque gestantis arundineum Pygmæi palmum, cubitum, pedem immane quantum versatur discriminis. Nec proinde qui propositam longitudinem bipedalem esse dicit, aliquid eo certum indigitat, nisi quem unum præfinitum pedem intelligat, commonstret explicatiùs. Et qui duas urbes unius miliaris intervallo disjunctas pronunciat, illius distantiæ quantitatem non exprimit, nisi quodnam è prædictis miliare respicit, adsignificet disertiùs, & indeterminati vocabuli sensum satis restringat. Item si quis longitudinem quandam exæquari dicat distantiæ solis à centro terræ, nihil dicit, nisi præterea doceat, quam velit distantiam, apogæam, an perigæam, an mediæ longitudinis, an aliam quamvis in solaris orbitæ circumferentia fixam ac determinatam. Denique, si quis rectam lineam parem affirmarit lineæ rectæ à centro cujusdam ellipsis ad ejus ambitum prætensæ,

neu-

neutiquam ex eo poterit illius rectæ dimensio censeri, quia millies mille tales à centro ellipsis deduci poterunt, longitudine diversæ, & sibi impares rectæ lineæ, quámque præ reliquis signet ille, nisi subdat aliquam ulteriorem determinationem, constare poterit nemini. Porro notandum, quòd non unius sit modi, sed aliquam differentiam admittat hæc determinatio quantitatis, adeóque consequens illam mensuræ ratio nonnihil erit diversa. Nam alia determinatio quodammodo naturalis est & universalis, alia singularis & prorsus arbitraria. Naturaliter & genericè determinatur id quod certam naturam habet, & semper eodem modo respicit ea quanta cum quibus comparatur, aut quibus dimetiendis inservit; unde habet, quod immediate sit aptum natum eorum proportionibus generaliter determinandis: & consequenter etiam singularibus ipsorum quantitatibus notificandis, modo singulariter ipsum notum supponatur. Quo pacto circuli radius & latus quadrati naturaliter determinata sunt: radius, inquam, circuli taliter determinatur, quoniam similium arcuum subtensæ, & similiter utcunque positæ quælibet in circulo rectæ lineæ proportionem ad radium eandem habent, & ex relatione ad radium ita quantitate determinantur, ut eo singulariter determinato, semper earum quantitas una singulariter determinatur. Ut in quocunque circulo, majore nil refert an minore, latus hexagoni radio æquatur, sinus rectus graduum 30 radii dimidius est, chorda graduum 90 radii potentiâ dupla est: unde si determinetur & cog-

noſcatur ipſa ſingularis radii quantitas (hoc eſt, ſi ſenſûs æſtimationi ſubdatur, vel numero denominetur alicujus ſingularis cognitæ menſuræ) innoteſcat inde ſtatim dictarum linearum quantitas. Similiter è cognito latere quadrati, exceſſus diametri ſupra latus, & aliarum definite poſitarum in quadrato linearum quantitas facilè certóque dignoſcatur. Hujuſmodi verò determinationes adhibet, & circa tales dimenſiones occupatur Geometria theoretica; quæ nempe non tam immediatè ſingularium magnitudinum quantitates, quàm univerſalium rationes inveſtigat; è quibus tamen ſingularium dimenſiones fluunt, vel in iis fundantur. Arbitrariè verò determinantur illæ menſuræ quæ ſingularibus dimetiendis quantis applicantur; quæ nempe cùm nullam ad id ex ſe peculiarem aptitudinem habeant, ex infinitis ſui generis aliis ad libitum ſeliguntur, ex pacto vel inſtituto deputantur huic officio metiendi. Qualem obtinent determinationem paſſus, ſtadius, arundo, ſchœnus, aliæque quæ verſantur in uſu communi, quáſque Geometra practicus adſumit in peculiarium magnitudinum dimenſione. Verùm non eſt quòd his ſatis à ſe perſpicuis diutiùs immoremur.

3. Tertia menſuræ proprietas eſt, ut ejus quantitas ſit aliquatenus præcognita, cùm enim (juxta definitionem Ariſtotelicam, μέτρον ἐστιν ᾧ τὸ ποσὸν γνώσκεται) menſuræ ratio præſertim exigat, ut quantitatem ignotam declaret, priùs ipſa cognoſcatur oportet: ſiquidem ab ignoto nihil innoteſcat, ab obſcuro nihil illuſtretur. Advertimus autem quòd & quantitatum notitia ſit diverſimoda: de quibus

bus primò, una radicalis est, absoluta, prima notitia, quà res sensibus exposita quanta sit ab ipsis immediatè discernitur & æstimatur, illam velut intuitu quodam attingendo, neque præterea cum aliis quantis comparando. Hoc modo notum habetur in Geometria quicquid efficere possumus vel exhibere, ignotum verò cujus constructionem ignoramus. Ut si proponatur circulus aliquis, Geometris notum est latus inscripti regularis trigoni, tetragoni, pentagoni, hexagoni, decagoni, pentecaidecagoni, omniumque progredientium duplo deinceps ab his numero (vel etiam aliquatenus triplo, quia per Geometriam planam communem bisecari, pérque sectiones conicas utcunque trisecari potest arcus quilibet, vel angulus designatus) sed complurium aliarum regularium figurarum latera sunt ignotiora, víxque nullâ scientificâ ratione possunt exhiberi. Quinetiam hoc modo singularis expositi circuli peripheria nota dici potest, quia quanta sit utcunque sensu potest apprehendi, tametsi cum recta linea justè comparari nequit, & quæ sit ejus ad hanc exacta proportio forte nullatenus comprehendi potest à nobis. Veruntamen sicut recta linea conspectui repræsentata speciem imprimit sui, certúmque de se judicium procreat, à quo nota dicitur: ita circuli circumferentia suæ quantitatis idæam insculpit phantasiæ, juxta quam cognita reputetur. Neque forsan magis recta linea sui generis lineis, quàm peripheria circularis peripheriis circularibus, & aliis quæ ad eas referri possunt lineis dimetiendis approprietur & congruat. Cæterum hoc mo- 1.

do notæ sunt, nec alio modo, primitivæ quæque mensuræ, ad quas ejusdem generis mensuræ referuntur; quarum quidem quantitatem vix aliter explicare licet, quàm ad illas digitum intendendo, déque ipsarum quantitate percunctanti respondendo, tanta est quantam intueris, aut sensu percipis. Unde consectatur, ut hoc modo quidpiam dignoscatur, & prototypæ mensuræ rationem subeat, imprimis exigi, ut à sensu quopiam æstimabilem quantitatem habeat; & proinde cùm ut subjiciatur sensui, tum ut mediocrem habeat quantitatem, intra debitos limites ita consistentem, ut sensus in ejus æstimatione non facile decipiatur, hoc est, ut si considerabile quid apponatur ei, vel ab ipsa subtrahatur, non id sensum effugere queat. Quapropter optimè notat Aristoteles, id quod obiter moneri par est, cæteris paribus minimas sensibiles magnitudines

Met. X. 1. mensuræ vicem obire commodissimè: Ὅπου μὲν οὖν δοκεῖ μὴ εἶναι ἀφελεῖν ἢ προστιθέναι, τοῦτο ἀκριβὲς τὸ μέτρον· *Ubi nihil adjici potest aut adimi, quin à sensu facilè percipiatur & agnoscatur discrimen, id accuratissima fuerit mensura.* Minora verò quanta præsertim talia sunt, quoniam majora faciliùs aucta vel imminuta sensûs judicium latent; Ἀπὸ γὰρ σταδίου καὶ τάλαντου, καὶ ἀεὶ τοῦ μείζονος λάθοι ἂν προστεθέν τι καὶ ἀφαρεθὲν μᾶλλον ἢ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος· *A stadio vel talento, & universim à quolibet majore magis lateat ablatum aliquod aut adjectum, quàm à pede, vel ab obolo, vel à quovis minore deductum, seu ei appositum.* Unde concludit Philosophus, Ἀφ' οὗ πρώτου κατὰ τὴν αἴσθησιν μὴ ἐνδέχεται. τοῦτο πάντες ποιοῦνται μέ-

τρον.

πρῶτον, καὶ τότ' ὄιον τε εἶναι τὸ ποσὸν, ὅταν ἀφῶσι διὰ τοῦτο τὸ μέτρον· (*Id à quo primum quoad ſenſûs æſtimium nihil abſtraki poteſt, menſuram ſtatuunt omnes, & tunc ſe quantum aliquod arbitrantur cognoſcere, quum per hujuſmodi menſuram cognoſcunt*). Saltem hoc nomine ſunt ad hoc ineptæ, & ab originalis hujuſmodi menſuræ, ratione penitus excluduntur omnes grandiuſculæ magnitudines; eò quòd illorum differentiæ nequeunt omnino, vel non ſatis exquiſite dijudicari à ſenſu. Nam, ut Optici notant, diſtantiæ pedes ducenos ſuperantes à viſu, ſenſu longiſſimè pertingente, diſcerni nequeunt, & ſibi videntur omnes æquari (Luna nempe, Sol, ſtellæ fixæ, quamvis revera tot milliarum myriadibus aliæ aliis longinquiùs à nobis ſemotæ, videntur nihilominus omnes intervallo pari diſtare, ac velut unius cujuſdā in oculo centrum habentis ſphæræ perimetro verſari) quin & earum quæ ad dictum intervallum propiùs accedunt, longitudinum differentiæ vix æſtimantur à ſenſu. Unde etiam evenit, quòd (propter radiorum nempe viſualium longiùs procurrentium veras differentias non animadverſas) objecta planities, campeſtris vel æquorea, videatur aſſurgere, vel in gibbam ſuperficiem intumeſcere. Sed de hujuſmodi notitia ſenſibili nimis. Cognoſcitur ſecundo, quantitas ex collatione cum menſura quapiam per ſenſum expoſito modo dijudicata; quando nempe ſcitur quam in quantitate relationem habet ad iſtam, quoties eam continet, aut in ea continetur, quanto ſuperat eam, vel excediturabea. Hoc modo nota quanta menſuræ poſſunt eſſe dicique, ſed mediatæ vel 2.

ſecundariæ. Magnitudines, inquam, neutiquam ſenſibus objectæ, nec ab iis ullatenus æſtimabiles menſuræ rationem bene ſuſtentent, ſi per dimenſionem organicam, vel per legitimum qualecunque ratiocinium reperta fuerit ipſarum ad alias ſenſu jam æſtimatas proportio. Semidiameter e.g. telluris, etſi nemini viſa, ſensûſque noſtri tranſcendens æſtimium, poterit tamen eſſe menſura magnitudinum ac diſtantiarum, quas habent cœleſtia corpora, modò per idoneas hypotheſes, & probum diſcurſum innotuerit, quot ipſa ſtadios, paſſus, aut pedes complectitur ac exæquat. Vel quòd ita ſe habet ad aliquam ex iſtis prænotis menſuris primitivis, ut talis expoſita recta linea ad aliam rectam lineam exhibitam. Verùm adhuc tertiò, peculiari ratione notum dicitur id, quod numeris exprimitur, ejus relationem denotantibus ad expoſitum aliquod priùs æſtimatum quantum (ſive familiari nobis uſu præcipue cognitum, ſeu gratis & ex arbitrio ſumptum) ſi nempe concipiatur illud præcognitum quantum vel indiviſum, hoc eſt, unitate deſignatum, vel in æquales aliquot partes diſtributum, juxtáque diviſionem iſtam certo quodam numero denominatum, tunc autem reperiatur quis numerus iſtarum partium æqualium, vel quot ex iſtis unitatibus, vel quæ pars iſtius unitatis conveniat propoſito quanto, dicetur inde perfectè notum illud quantum, hoc eſt, in datæ menſuræ partibus notum. Quinimo ſæpe quantum, alioqui ſenſibus expoſitum, & per ipſos æſtimabile (vel cujus ad expoſitam ratio per terminos ſenſibiles æſtimetur) nihilominus ignotum cen-

cenſetur, donec ejus ad ſtatam aliquam menſuram proportio in numeros rediga tur, per numeros explicetur. E.g. quamvis in aliis quo circulo ductus fuerit, & oculis objectus ſinus rectus graduum 30, tamen aliquatenus ignorata reputabitur ejus quantitas, donec animum advertendo, ratiocinandóque colligamus eum adæquari dimidio radii ; tunc autem penitiſſimè comperta cenſebitur ejus quantitas. Id quod (ignota ſcilicet haberi, quorum ad ſolennem & uſitatam aliquam menſuram ignoratur in numeris ratio) cauſis è compluribus oriri videtur. Tum primò, quia judicium ſensûs magis lubricum & incertum, minúſque perſpicax & exquiſitum eſt, quàm in numerorum certâ proportione fundata quantitatis æſtimatio; tum ſecundò, quia faciliùs & commodiùs, per numerorum ſymbola repræſentantur animo, quàm reipsâ ſenſibus exhibentur quantitates, aut quantitatum rationes: tum tertiò, quia ſenſibiles objecti ſpecies magis evanida, fluxa, mutabilis eſt, quàm numerus, qui facillime retinetur in memoria, chartæque commendatur ; ubicunque nullis ferè mutationibus, accrementis, decrementis obnoxius aſſervatur. Tum denique quartò, quia numerorum interventu rerum omnium quantitates ad paucas, familiares admodum, ab omnibus, & ex condicto communiter uſurpatas menſuras rediguntur. Quas (& ſi quæ ſunt conſimiles) hujuſce rei cauſas (quamobrem ſcilicet id præcipuè notum & penitus exploratum habetur, cujus ad aliquid antea cognitum ratio numeris exprimitur) etſi conſideratu non indignas, quoniam ad alia prope-

ro, jam transilio. Singulares hactenus attigi quantorum notitias; at quartò, notum quodammodo dicitur omne quantum (sicut & determinatum ut supra diximus) cujus generalem naturam utcunque comprehendimus, etsi singularem ejus quantitatem ignoramus, aut non consideramus. Ita scimus quomodo se habet in circulo radius, in quadrato latus, etsi quæ sit hujus aut illius radii circularis, vel lateris quadratici singularis quantitas nescimus aut negligimus. Quomodo præsertim nota sunt illa quanta, quæ aliorum generationi prælernuntur & inserviunt, adeóque generationem consequens omne determinant, indéque naturâ suggerente mensuræ sibi munus asserunt. Ut si circulus procreatus supponatur ex revolutione radii, quadratum ex ductu lateris in se, vel ejusce motu recto parallelo; quoniam omnium reliquarum in circulo vel quadrato linearum quantitas atque positio dependent ex radii lateríque quantitate, ac motu tali, proinde primario nota, nec immeritò, censentur illa; súntque primitivæ generales mensuræ, ex comparatione cum quibus, quæ ipsorum respectu similem perpetuò determinatum situm obtinent, generali consequenter modo dignoscantur; hoc est, horum ad illa constans proportio sciatur, adeóque quantitas etiam horum singularis non lateat, ex hypothesi quod illorum singularis quantitas innotescat. Siquidem compertâ duorum quantorum proportione, ex uno eorum cognito protinus alterum cognoscetur. De mensuræ proprietatibus hactenus; jam quo i in proposita methodo succedat, de mensurandi modis paucula subdemus.

4.

mus. Varii sunt ii, sed nos præcipuos aliquos cogitanti semet objicientes perstringemus. Comparantur inter se homogenea quanta utcunq; ignota & determinata, cum notis & determinatis; hoc est, mensurantur primò, per merum ratiocinium ipsorum proportiones indagando. Sic ex radio dato colligit Geometra quantum sit latus inscripti regularis trigoni, demonstrando scilicet e suis principiis, quod sit potentiâ triplum radii. Sic & ex aliunde prænotis apparente Lunæ diametro, Lunæque distantia ab oculo quanta sit ejus vera diameter, declarat ope canonis sinuum, Geometricis e ratiociniis constructi. Hic modus omnino theoreticus est, utpote quo generalis quantitatum dimensio perficitur, quam sola ratio potest attingere: proinde modus hic perfectus & ad rigorem exactus est. Secundò, per solam organicam dimensionem, quæ deservit ignotorum quantitatibus ad certæ mensuræ numeros adducendis; istis præsertim quæ nequeunt à sensu commodè saltem & satis accuratè æstimari. Ita arcus & angulos per quadrantes circulares in gradus & minuta distributas, longitudines autem per regulas & scalas in æquales particulas utcunque divisas metimur. Hic modus circa sola quanta singularia versatur, & purè mechanicus est, nec ideo plerunque præcisus & accuratus. Tertius autem modus per discursûs, & organicæ dimensionis, mentis & manûs, conjunctas peragitur operas. Qui quidem practicus est, & versatur circa τὰ καθ' ἕκαστον, sic tamen ut generalium theorematum opem adsciscat; unde pede claudicat uno, sed altero re-

rectus & certus incedit, heroicúmque refert genus quatenus Geometriæ regulas adhibet, divinitatem quandam habens, æternæ & indefectibilis veritatis particeps, quatenus autem mechanicam ἀνίσορρίαν desiderat, caducum & mutabile, peccatis & erroribus obnoxium. Hoc modo nedum obvia quæque nobis ob oculos, ante pedes, intra contactum posita, sed & res innumeras manibus intractabiles, vestigiis nostris impervias, imo sensibus ipsis inaccessas, & vix animo bene comprehensibiles attingimus ac dimetimur; telluris profunditatem & ambitum, astrorum magnitudines & intercapedines. & quicquid cum quantis organicæ dimensioni subditis aliquam sensibiliter finitam proportionem habet. Nam ex mechanicè dimensorum ad alia dimensionem excedentia propostione, etiam horum quantitatem, Geometriæ subsidio prorsus infallibili ratione perscrutemur licet & pernoscamus. His subjicio modum, juxta quem sciscitantibus quanta sit aliqua magnitudo respondemus, ipsam realiter exhibendo sensibus æstimandam, aut per dictam organicam dimensionem ad cujusvis mensuræ cognitæ numeros reducendam. Ut si quis interroget quanta sit recta linea à dato puncto circulum propositum contingens, Satisfactum erit quadantenus, Geometricè ducendo rectam illam, & quærentis oculis ostentando. Nam ita vel ipsam intuendo quanta sit discernet, aut ad scalam quamvis examinando quot notæ mensuræ particulis præcisè vel præterpropter adæquetur comperiet. Quintus modus est, quo declaretur ignota quantitas per æquationem aliquam, quæ

4.

5.

quæ ipſius ad alias notas quantitates utcunque relationem exprimat, adeóque menti præbeat ipſam aliquouſque comprehendendam ; cujus quidem æquationis artificioſa reſolutio juxta regulas quaſdam ei propoſito accommodatas, & in analytica doctrinæ præſcriptas, dimenſionem hanc integrè conſummabit, quæſitámque quantitatem, ſeu Geometricè ſeu Arithmeticè, reddet perſpectam. Ita ſi detur circuli radius & arcûs deſignati tangens, quæratúrque quanta ſit tangens arcûs dupli, repræſentabitur ejus quantitas per talem æquationem : xrr — xaa = 2rra ; vel rr — aa. 2rr :: a. x. Tangens quæſita dati dupli arcûs ducta in differentiam quadratorum radii, & notæ tangentis arcûs ſimpli æquetur duplo quadrato radii ducto in tangentem arcûs ſimpli. Vel quod eodem recidit per hunc analogiſmum ; Exceſſus quadratorum radii & datæ tangentis ſe habet ad duplum quadratum radii, ſicut data tangens ad tangentem quæſitam. Quo theoremate præſtantiſſimus D. Pellius Longomontani tetragoniſmum refutavit. Item ſi detur in numeris ſubtenſa cujuſvis arcûs, & radius circuli ponatur unitas, & quæratur quanta ſit hujus arcûs triplicati ſubtenſa, quantitatem iſtam hujuſmodi declarabit æquatio : Quæſita ſubtenſa tripli arcûs æquabitur triplæ ſubtenſæ dati arcûs ſubtripli minùs ejus cubo ; (q = 3z — z^3 ; vel qrr = 3zrr — z^3). Quod theorema conducere poſſet eidem propoſito.

r = *radius.*
a = *tangens data.*
x, *tangens quæſita.*
z = *arcus.*
q = *arcus triplus.*

Sed his ulteriùs explicandis immorari non li-

licèt. Indulgete tamen oro patientiæ veſtræ pauxillum, alteram menſuræ præcipuam notionem leviùs attrectanti, ſub hac tamen conditione, nè vobis per aliquot abhinc ſeptimanas iterum faſtidio ſim; quòd ſi viſus ero juſto ſolitoque prolixior, perſpicite vel hinc quàm ægrè divellar à conſpectu conſortióque veſtro, quámque vobis illibenter valedicam. Altera principalis menſuræ acceptio, juxta quam ſemper in elementis deſignat id, quod aliquoties acceptum exactè componit & conſtituit, vel aliquouſque ablatum perimit, & penitus exhaurit rem homogeneam menſuratam, ſatis antehac ipſa per ſe luculente deſcripta eſt in Lectione præcedente. Quoad hanc autem intellecta menſurabilitas itidem quantis omnibus convenit; ſiquidem omne quantum (magnitudo quidem πρώτως καὶ ἁπλῶς, reliqua verò quanta ἐπομένως καὶ κατὰ μέτρον) ſuo modo menſurabile eſt ſecundùm hanc notionem, hoc eſt, diviſibile quotvis in partes ſeu gradus æquales; vel quovis numero denominabile, repræſentabile, explicabile eſt; prout à Trigonometris radius circuli quantumvis exigui diviſus ſupponitur in centies millenas, vel millies millenas, aut utlibet plures particulas æquales; & tempus quodvis utcunque breviuſculum in minuta quotvis diſpertiatur pro computantis arbitrio; & velocitatis ponderiſque cujuſvis tot gradus ſupponere licet quot quiſque velit. Numerus enim quilibet quanti cujuſvis idoneum ſymbolum eſt, ei ſignificando comparatum: & ſicut numerus quilibet Mathematicus, conſtans nimirum unis æqualibus inter ſe, ab

uno

uno toties accepto componitur, eóque toties abstracto exhauritur, hoc est, ab eo exquisitè dividitur & mensuratur, ita correspondenter numero quovis expressum quantum (hoc est, juxta numeri istius exigentiam in tot æquales particulas distributum singulas uni respondentes) à quavis per unum designatâ particulâ mensuratur. Nihil hîc subesse difficultatis videtur aut obscuritatis: & hujusmodi mensuræ respectu comparata quanta dici solent à Geometris symmetra vel assymmetra, quorum symptomatum contemplatione nihil in Mathematicis mirabilius est ferè vel utilius, quamvis nihil à vulgari captu conceptúque remotius. Notat Aristoteles hinc desumptâ instantiâ, quantum admiratio plebis imperitæ discrepet & adversetur sententiæ peritorum atque scientium; siquidem inter ea, ad quæ vulgus potissimùm stupet, censetur ἀσυμμετρία διαμέτρου (incommensurabilitas diametri cum latere quadrati) θαυμαστὸν γὰρ εἶναι δοκεῖ πᾶσιν, εἴ τι οὐκ ἐλάχιστον μετρεῖται· *Omnibus*, hoc est τοῖς πολλοῖς, *mirabile videtur, si quid aliquousque magnum non possit admodum exiguâ quâpiam alterius homogenei quanti mensurâ exhauriri; contrà verò nihil magis Geometra miraretur, quàm si non contingeret hoc*, οὐδὲν γὰρ ἂν θαυμάζειεν οὕτως ἀνὴρ γεωμετρικὸς, ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητή. Plato verò communem hujus passionis ignorantiam pathetice deplorat, quam & vocat γελοίαν καὶ αἰσχρὰν ἄνοιαν ἐν τοῖς ἀνθρώποις πᾶσι *ridiculam & turpem inscitiam plerorumque omnium hominum animis insidentem*: neque non sibi videri prædicat non tam humanum, quàm pecuinum affe-

Met. I. 2.

Plato VII. de Leg. versùs finem.

affectum talia non percipere: Τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα, καὶ ἔδοξέ μοι τοῦτο οὐκ ἀνθρώπινον, ἀλλ' ὑεινῶν τινῶν εἶναι μᾶλλον θρεμμάτων. Se denique Græcorum omnium causà pudore non modico profitetur affectum, quoniam hanc tam obviam quantorum passionem plerique nescirent; & contrario potiùs errore abducti, magnitudines ejusdem generis omnes inter se commensurabiles existimarent. Ἠγνόθην δὲ οὐχ ὑπὲρ ἐμαυτοῦ μόνον, ἀλλὰ καὶ ὑπὲρ ἁπάντων τῶν Ἑλλήνων, &c. De his igitur adeò mirandis
1. symptomatis tantillum videamus. Quod symmetriam attinet, penes vulgus, & apud scriptores exotericos aliquando denotat rei cujusque debitam quantitatem, intra certos naturæ suæ congruos fines constitutam. Ut
Eth. II. 2. apud Aristotelem in Nichomachiis, Τὰ πολὰ καὶ τὰ σιτία πλείω, καὶ ἐλάττω γενόμενα φθείρει τὴν ὑγίειαν, τὰ δὲ σύμμετρα ποιεῖ, καὶ αὔξει, καὶ σώζει. Ubi σύμμετρα bene vertas modicà, moderata, conformia, à debitæ quantitatis modulo neutra ex parte, nec excessu nec defectu aberrantia. Plato in Politico, Δεύτερον δὲ περὶ τὸ σύμμετρον, καὶ καλὸν, καὶ τὸ τέλεον, καὶ ἱκανὸν. Ubi τὸ σύμμετρον idem valet, vel affine est τῷ pulchro, perfecto, idoneo; quod ejus declarat acceptionem. Sæpiùs autem apud eosdem symmetria rei variis ex partibus compositæ, decoram & aptam in partibus congruentiam, seu conformitatem inter se mutuam designat; in qua præcipuè consistit pulchritudo rerum & elegantia: quapropter in Architectura talis potissimùm symmetria spectatur, & à Vitruvio sic defi-
Vitruv. I. 2 nitur; *Symmetria est ex ipsius operis membris*

con-

conveniens conſenſus, ex partibúſque ſeparatis ad univerſæ figuræ ſpeciem, ratæ partis reſponſus. Juxta quas acceptiones, ex contrariorum ingenio, ſatis liquet quid ſit aſymmetria, rei ſcilicet enormis, immodica, diſcongruens, exceſſiva vel defectuoſa quantitas; vel inepta & indecora partium aggregatio. Hiſce verò tralatitiis ſignificationibus obmiſſis, ſymmetria ſecundò, nonnunquam denotat 2.
quamvis magnitudinum (aut aliorum quantorum) comparabilitatem inter ſe, quoad quantitatem, hoc nempe ſecundùm alteram latiorem acceptionem τῷ menſurare, pro comparare rerum quantitates inter ſe, vel ignotæ quantitatis ad notam inveſtigare proportionem. Quomodo ſymmetrum nihil eſt aliud quàm homogeneum, & aſymmetrum prorſus idem cum heterogeneo; quatenus ejuſdem generis omnia quanta proportionem habent inter ſe, adeóque ſunt hoc modo commenſurabilia; quanta verò diverſi generis nullam ad ſe mutuò rationem habent, adeóque nullatenus commenſurari queunt. Ita lineæ cunctæ σύμμετροι ſunt inter ſe, ſed linea reſpectu ſuperficiei vel corporis, reſpectúque temporis, velocitatis, & ponderis, ἀσύμμετρα eſt. Verùm communiter apud 3.
Geometras ſtrictiùs dicuntur σύμμετρα quanta, quæ ab eodem quolibet homogeneo quanto menſurari; hoc eſt, perfectè dividi, ſicut nihil ſuperſit reſidui, pérque ſubtractionem ejus (ſive factam ſemel, ſeu quotieſcunque repetitam) penitus exhauriri queunt: vel, quorum idem quantum eſt pars aliquota nonnulla: vel, quæ ſe habent ſicut numerus aliquis ad alium generis numerum (unitatem adſcribendo

ſcribendo numeris). Quomodo nimirum uncia pes, & paſſus, ſunt ſymmetræ lineæ, quoniam uncia ſemel accepta ſeipsâ, duodecies accepta pedem, ſexageſies accepta paſſum conſtituit; vel toties ablata dividit, ut nihil remaneat; vel quoniam ſe habent hæ longitudines ut numeri 1, 12, 60. Sic in ponderibus marca & libra ſunt commenſurabiles, quoniam tertia pars ſolidi metitur utrumque, nempe quadragies accepta marcam, ſexagies ſumpta libram efficit; vel quia ſunt ut 2 & 3, in temporibus cyclus Solis cyclo Lunæ commenſurabilis eſt, quoniam ſe habent ut 28 ad 19, & annus unus utrumque dimetitur. Aſt hæc ſatis perſpicua ſunt. Aſymmetra verò quanta ſunt, quorum omnino nulla reperiri poteſt, imò nulla datur in rerum natura quantumlibet minima communis menſura, quæ nempe toties accepta compleat hoc, toties illud; toties & toties, juxta quoſlibet numeros, ablata complete dividat utrumque, ſic ut nihil relinquatur; quæ non ſe habent ut ullus quicunque numerus ad alium quemcunque; nullam habent proportionem numeris ullis, integris aut fractis, explicabilem: quorum proinde ſi quod unum numero exprimatur aliquo, reliquum prorſus ineffabile erit. Cujus affectionis celeberrimum & pervulgatiſſimum exemplum præſtant latus & diameter quadrati, quæ ſic afficiuntur inter ſe, ut nulla quamcunque proximè ad atomum accedens lineola metiatur utrumque. At ſi millies milleſima pars unius, puta lateris, applicetur alteri, nempe diametro, vel auferatur ab ea quoties fieri poteſt, ſemper ad extremum reſtabit aliquid, & nunquam complera

pleta fiet congruentia vel diviſio. Et hoc quidem eſt illud mirabile ſymptoma quod humanum penè captum ſuperat, & horum inſuetos meritò torquet; id quod adhuc fortaſſe mirabilius videatur, modò perpendantur una vel altera, quam ſubjiciemus, obſervatiuncula. Primò, quòd ſi proponantur 1.
incommenſurabilia duo quanta A, B, poſſit inveniri quantum alterutri A commenſurabile qualibet in proximitate ad B, vel differens à B minùs quàm aſſignabili quavis quantitate (id quod facillimè demonſtrari poteſt, & conſectatur, ni malè commemini, è lemmatio quodam, quod habetur demonſtratum in libro tertio ſphæricorum Theodoſii). Unde patet illud quicquid eſt, à quo quantorum hæc incommenſurabilitas exurgit, vel quo incommenſurabile quantum exſuperat, vel non attingit aliud expoſito quanto commenſurabile, fore infinitè parvum, minus quovis aſſignabili, vel per animum comprehenſibili quanto. Quod & ex radicum extractione (numerorum ſcilicet irrationabilium quos vocant) eſt pariter manifeſtum: iſthic enim ad verum quæſitæ radicis valorem propiùs ſemper & propiùs acceditur, ad infinitum progrediendo, nunquam tamen juſtus valor obtineri poterit; hoc ἀξιοθαύμαστον, præſertim cùm ſecundò, non ſolùm ſimpliciter 2.
incommenſurabilia ſunt quanta, ſed & plures (fortaſſis infinitos) incommenſurabilitatis quaſi gradus videntur admittere; ut unum nempe quantum reſpectu quanti cujuſvis expoſiti magis alio à commenſurabilitate procul elongetur. Et aliud magis hoc, & ſic porro deinceps, donec extremum ali-

Vide Cavaller. Exerc. p. 526.

quod à primo velut infinito distet intervallo. Notavit ὁ στοιχειώδης quasdam lineas cum exposita quapiam nedum longitudine, sed quod magis est etiam potentiâ incommensurabiles esse; atqui nonnullarum etiam quadratiquadrata cum expositæ quadriquadrato, & quarum harum potestates superiores cum illius potestatibus respective coordinatis incommensurabiles sunt. Unde si cujus potestas velut infinitè ab unitate dissito numero denominata sit expositæ respectivè coordinatæ potestati incommensurabilis, illa videtur expositæ respectu gradus incommensurabilitatis velut infinitos sortiri. Quomodo se res habere videtur in circuli circumferentia respectu radii. Nam inscripti quadrati latus est longitudine radio incommensurabile, & proinde quadrati ambitus est radio incommensurabilis. Octogoni verò inscripti quadratum est incommensurabile radii quadrato, & proinde quadratum octogonalis perimetri est incommensurabile quadrato radii; neque non ita continuò regularium inscriptorum circulo polygonorum ambitus potestates habent superiores coordinatis radii potestatibus incommensurabiles, unde polygonum horum ultimum, hoc est, ipse circulus, videtur habere perimetrum infinitis gradibus incommensurabilem cum radio. Quod si verum fuerit, actum erit de circuli tetragonismo, cùm ratio circumferentiæ ad radium inde sit ex natura rei penitus inexplicabilis; adeóque problema illud, talis rationis ἐξεύρησιν desiderans, solutu sit impossibile, vel eo potiùs ipso solvatur, quod impossibile deprehenditur. Siquidem

duo-

duobus punctis resolvitur problema, vel ostendendo quale sit & quomodo fiat quod requiritur, vel indicando quod fieri nequit. Sed hoc tantum mysterium tribus verbis evolvi nequit; si tempus & opportunitas suviſſent, plura saltem huic explanandæ firmandæque conjecturæ conatus essem producere. Denique, nè sim ultrà tædio, monebo præter hæc tantùm, præcipuam asymmetriæ rationem in hoc videri fundatam; quòd cùm inter duos numeros planos sibi similes (hoc est, qui procreantur ex multiplicatione numerorum inter se proportionalium) semper inveniri possit medius numerus proportionalis (quippe productus è numeris planis similibus in se multiplicatis est semper numerus quadratus, cujus radix est iste numerus proportione medius) item inter solidos duos similes numeros semper intercedunt duo medii proportionales: & pari modo duos inter similes planoplanos dantur tres proportione medii, ac ita porro quoad reliquas ulteriores imaginarias dimensiones; cùm, inquam, in similibus numeris ita se res habet, idque demonstretur in Elementis, omnino secus accidit in numeris planis, solidis, planoplanis, & reliquis dissimilibus: nam ex parte rei nullus datur inter planos duos dissimiles numeros medius propoportionalis numerus; nec inter solidos dissimiles duo, nec inter planoplanos tres, ac ita deinceps; id quod etiam ibidem ostenditur. Unde si duo quanta ponantur habere se in ratione duorum numerorum planorum dissimilium, & hæc inter quanta reperiatur medium proportionale, quod perpetuò fieri

poteſt ob indefinitam cujuſque quanti diviſibilitatem, nullus extabit numerus in univerſa rerum natura, qui repræſentet hoc quantum, aut ei reſpondeat, & conſequenter hoc, illis primò poſitis, péreque numeros expreſſis, ἀσύμμετρον erit. Eodem iſcurſu, ſi inter duo quanta diſſimilibus numeris ſolidis expreſſa duo reperiantur quanta proportione media (quod & rei natura patietur fieri) nullum tota, quanta quanta, eſt numerorum ſeries ſuppeditabit hiſce repræſentandis idoneum numerum; adeóque hæc reſpectu quantorum expoſitorum ineffabilia prorſus erunt, & incommenſurabilia. Unde patet in tranſcurſu, quòd numerorum quàm aliorum quorumcunque quantorum infinities reſtrictior, & quaſi pauperior ſit natura; pauciſſimis enim, comparatè loquendo, quantorum proportionibus exprimendis ſufficiunt, aut inſervire valent, numeri rationales ſeu vulgares: nec aliter plerarunque figurarum regularium, cùm latera, tum areæ quàm per ſurdos & irrationales numeros exhibentur aut explicantur. Verùm hæc tantummodo curſim & tumultuariè licuit inſinuare, fuſiorem explicationem deſiderantia. Jam nihil ſupereſt, præterquam ut vobis (auditores optimi & humaniſſimi) grates referam propenſiſſimas & ampliſſimas, pro eximia veſtra per totum hujuſce longiuſculi termini decurſum, liberaliter indultâ nugis noſtris patientiâ. Utinam aliquando tam benignâ candidâque attentione digniora, votíſque veſtris acceptiora poſthac nobis obtingant argumenta diſſertandi; quæ & veſtram magis oblectent ingenuam curioſitatem,

tatem, & noſtram exacuant tenuem induſtriam. Interim valere dico vobis, & animitus voveo. Valete, bono cum Deo.

Hactenus Lectiones, ut habitæ ſunt publicè, ſic ordine deſcriptæ veniunt nuſquam interturbato; nunc ſeriem abrumpo. Cùm enim nec lege tenear, & præ tædio laboris ac temporis penuria non poſſim omnes (at ſaltem decem ad minus) exhibere, decrevi reliquis aliquot intermiſſis tres ultimas adponere.

FINIS.

ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis:

An. Dom.

M. D C. L X V I.

LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli*. 1684.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

LECT. I.

SAlutem gratulor, auditores optimi, voveóque perquam vobis diuturnam, nec ultra de procœmiis ſolicitus penſum repeto, ſic ut methodo pridem inſtitutæ pergam inſiſtere. Propoſitum fuit (meminiſtis opinor) generales magnitudinum (& inde reliquorum quantorum) affectiones pertractare. E quibus cùm pluſculas excuſſerim, pro meo modulo non incuriosè, nunc ad illam Matheſeôs velut animam penè deventum eſt, proportionalitatem; è qua ferè pendet quicquid uſpiam in Mathematicis mirabile vel abſtruſum demonſtratur. Cùm autem proportionalitas in comparatione proportionum, proportio conſiſtat in comparatione rerum quantarum, expedire videtur, προπαιδευτικῶς, ſeu præludii loco, ut de quantorum imprimis ipsâ ad pro-

proportionem requisita comparabilitate dispiciamus. Nec enim omnia quanta sic inter se comparari possunt, ut mutuam habere dicantur proportionem, at illa tantùm quæ peculiari ratione se proprius attingunt, cujus gratiâ dicuntur homogeneæ. De quantorum igitur homogeneitate & heterogeneitate jam disquiremus. In hanc verò rem imprimis notandum præter attributa communia, quæ conveniunt omnibus quantis, eáque distinguunt à rebus quantitatis expertibus (extensionem nempe, divisibilitatem, mensurabilitatem qualescunque, & his connexas passiones) alias haberi differentias, quæ res quantas dispescunt à se invicem, & in proximè subordinata genera distribuunt; sic ut quæ sub uno generum istorum continentur omnia dicantur homogenea, quæ sub diversis collocantur, heterogenea vocitentur. Sunt autem ista subordinata quantorum genera veluti totidem classes & prædicamenta quantitatis, eodem ferè modo sub quantitate disposita, quo vulgaria prædicamenta sub Ente; valde discreta à se mutuò, prætérque dictas illas generales quantitatis affectiones nihil inter se commune vel simile sortita. Cæterùm istarum convenientia & diversitatis ratio generalis est aptitudo vel ineptitudo, capacitas aut incapacitas quantorum ad compositionem seu coalitionem in unum totum; vel ad subtractionem seu constitutionem novi residui; addibilitas, ut ita dicam, vel inaddibilitas unius ad alterum; subducibilitas vel non-subducibilitas unius ab altero; excessus certus est animo comprehensibilis unius supra alterum, vel defectus unius

ab

ab altero; vel talis exceſsûs aut defectûs incapacitas; & hinc æqualitas vel inæqualitas unius reſpectu alterius: in his, inquam, & hæc concomitantibus aut conſectantibus fundatur homogeneitatis & heterogeneitatis ratio reſpectivè. Nam quæ ſic affecta ſunt, ut poſſint eſſe partes unius per ſe mente conceptibilis quanti, in unam ſummam aggregari, adjectione ſui ſe mutuò augere, vel detractione minuere; quæ certo exceſſu vel defectu differunt à ſe invicem; quorum unum haud impropriè vel ineptè dici poſſit æquale alteri, vel altero majus minúſve; homogenea ſunt, & ad eandem quantitatum inter ſe comparabilium claſſem pertinent; quæ ſecus heterogenea, diverſas ad tribus inter ſe diſcretas & ἀσυμβλήτους referenda. Sin hujuſce varietatis originem ulteriùs perſequi libeat, & unde talis ſubinde quantorum incomparabilitas exurgat indagare, ex hujuſmodi ferè cauſis ipſam comperiemus proficiſci. Primò, ex valde di- 1.
verſâ quorundam quantorum naturâ, quâ ſit ut uni communi menſuræ ſubjici nequeant, quæ pariter utrique congruat aut conveniat; imò nec ut ipſa mens noſtra poſſit ea connectere, vel ſub unius certi quomodocunque uniformis compoſiti ratione concipere; non ſecundùm æqualitatem aut inæqualitatem, exceſſum aut defectum, ullatenus ea contendere vel committere inter ſe. Ita v.g. magnitudo, pondus, velocitas, tempus, reſiſtentia, vis, heterogenea & incomparabilia ſunt; quia naturâ diſcrepant adeò, nihil ut commune metiatur ipſa; nec quomodo poſſint ipſorum quælibet connecti, congruere,

re, compoſitum aliquod non admodum difforme & Chimæricum ingredi; ſibimet adæquari, ſe ſuperare, mentis acies omnino valet attingere. Quis enim intelligat qualis ſumma conficiatur duobus annis ad tria milliaria adjunctis; quanto tres unciæ ponderis excedant duo minuta temporis; quid ſuperſit ſi ex tribus cylindris auferantur quatuor gradus velocitatis? non magis quàm quot toni muſici tot radios lucis adæquent, quot odores tot coloribus æquiparentur. Hæc nempe quò minus ad ſe juxta quantitatem intelligibili quopiam modo referantur, ingens obſiſtit naturæ diſſimilitudo atque diſtantia. Magnitudinis quantitas continua eſt & ſimultanea, abſoluta, ſenſibus attrectabilis & conſpicua; temporis fluxa, ſucceſſiva, menti tantùm imaginabilis, motum conſequens & connotans; velocitatis quantitas à temporis & ſpatii conjunctis rationibus pendet; pondus, vis, & reſiſtentia, quaſdam actiones implicant, & ex effectibus quibuſdam cenſentur. Ita diſſonant hæc inter ſe, ut in unum refugiant compingi. Hæc pri-
2. ma ſit & potiſſima τῆ ἑτεροσεναίας cauſa. Altera ratio diſcriminis iſtius petatur ex variis quoad quantitatem quaſi gradibus perfectionis; quatenus aliqua quanta pluribus modis extenduntur, & plurifariam dividi poſſint præ aliis, ſic ut hæc iſtorum reſpectu ſint quodammodo non quanta; nec poſſint adeò cum illis ſecundùm quantitatem comparari. Ita pluribus modis diviſibilis eſt ſuperficies quàm linea, corpus quàm ſuperficies; nec aliter ſe habet linea ad ſuperficiem, & ad corpus ſuperficies quàm punctum ad lineam,

hoc

hoc eſt, quàm indiviſibile ad diviſibile, vel ut non-quantum ad quantum (linea ſiquidem reſpectu ſuperficiei nihil aliud eſt fere quàm punctum longum, & ſuperficies reſpectu corporis nil aliud quàm linea lata, vel punctum quaſi longo-latum) igitur ἀσύμβλητα ſunt linea, ſuperficies, corpus, adeeque heterogenea. Evenit enim inde quod hæc ſecundùm æqualitatem & inæqualitatem inter ſe nequeant comparari, nec ita componi, ut ſummam aliquam conficiant, nec unum ab alio ſubtrahi ſic ut aliqua reſultet differentia, nec incrementum pariant addita, nec decrementum ablata. Eadem eſt ratio inſtantium reſpectu temporis; graduum velocitatis creſcentis ſingulis inſtantibus acquiſitorum reſpectu velocitatis integræ, conatuum itidem momentaneorum reſpectu motûs, & ponderis, & potentiæ; hæc enim inferioris & imperfectioris naturæ ſunt, quàm ut illis ullatenus æquiparentur, & genere conveniant. Verùm adhuc tertiò diverſitatis hujus origo ſit indefinitus & incomprehenſibilis unius quanti reſpectus ad aliud; qualis inter res (alioquin nomine naturâque cognatas) finitas & infinitas verſatur. Unde diverſi generis habentur linea recta finita & infinita; quamvis in infinita recta reperiatur linea quævis recta finita, cenſeríque poſſit iſta conſtituta ex hac infinities repetita. Hinc πολυθρύλλητον illud, finiti ad infinitum nulla eſt proportio (Λέγω δ' ὅτι οὐδεὶς ἐστι τῶν ἀπείρων πρὸς τὸ πεπερασμένον, apud Ariſtotelem) cujus tamen gnomes, ſeu axiomatis pervulgati veritatem quadantenus infregiſſe videtur modernorum Geometrarum ſolertia, 3. *De Cœlo l. 6.*

tia, dum innumerorum planorum & ſolidorum ad infinitum protractorum cum aliis planis & ſolidis finitis juſtam proportionem & ipſiſſimam æqualitatem demonſtrârint, id monſtri primùm exhibente clariſſimo Geometra Torricellio. 1. Ex quo pateat infinitas magnitudines finitis interdum homogeneas eſſe, cùm iis æquentur, & ab iis interdum excidantur. Vel inde potiùs inferatur, non quicquid extenſione interminatum eſt, idem eſſe quantitate prorſus infinitum; vel adhuc explicatiùs, quod ab unius dimenſionis infinitate non ſemper conſequatur ſuperficiei, vel corporis infinitas; cujus rei ratio non admodum difficilis videtur, id enim accidit ex eo quod unius dimenſionis infinita diminutio compenſet alterius infinitum accrementum; unde non adeo fidem exſuperat magnitudinem finitam, utcunque perexiguam, longitudine protendi ad infinitum. Igitur ut veritatem ſuam univerſalem tueatur, ita debet explicari prænotatum axioma: finiti magnitudine vel quantitate, ad magnitudine vel quantitate in illo genere infinitum proportio nulla eſt. Non autem ut intelligatur generatim terminatæ figuræ ad magnitudinem interminatam nullam dari rationem. His è radicibus pullulat heterogeneitas quantorum, & quæ contrario modo conveniunt inter ſe; quæ naturâ non adeò diſſimilia ſunt inter ſe, nec in diverſo quantitatis gradu conſtituta, nec infinito intervallo à ſe dirempta ſunt, ea ſunt homogenea. Cæterùm Euclides in definitionibus libri quinti, homogeneas magnitudines definit, quarum una, minor ſcilicet, aliquoties

ac-

accepta ſeu multiplicata, poteſt alteram excedere. Iſtius libri definitio tertia talis eſt : Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δυνάμενα πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. Ubi ὁ στοιχειωτὴς, ſicut rectè meâ ſententiâ notat doctiſſimus & clariſſimus vir, in ſua adverſus Meibomium diſputatione, non id agit (ut præter Meibomium alii exponunt, & quod demiror ille ſagax Clavius eò videtur propendere, quamvis alibi diverſa tradat) ut oſtendat quænam homogeneæ magnitudines rationem habent (quaſi ex illis aliquæ nullam haberent) at verò potiùs quænam magnitudines ſunt homogeneæ, ne quis iſtius vocabuli, in præcedente definitione poſiti, obſcuritate deceptus erret, aut ſuſpenſus hæſitet. Quum enim iſthic proportionem definit, relationem magnitudinum homogenearum, indefinitè proloquens, ſatis innuit, ſe magnitudines homogeneas univerſaliter, non quaſdam ſolummodo particulares intelligere ; alioquin etiam niſi quantis omnibus homogeneis mutuam inter ſe proportionem exiſtimâſſet competere, perperam illas ceu ſubjectum proportionis inſeruiſſet ejus definitioni ; rectiúſque ſecluſis illis earum loco adæquatum aliquod ſubjectum ſtatuiſſet. Vult igitur omnes homogeneas magnitudines proportione verſus ſe mutuâ affectas eſſe ; igitur lineæ duæ, una finita altera infinita, quamvis in genere lineæ quodammodo conveniunt, non ſunt ex Elementoris ſententia

tia

tia homogeneæ, quia finita quotieſcunque ſumpta nunquam ſuperabit infinitam; paritérque ſe res habet in quovis finito reſpectu cujuſvis alterius quantitate infiniti (quantitate dico, non extenſione locali, propter ante jam inſinuata) itidémque juxta hanc definitionem ſatis liquet puncta, lineas, ſuperficies, corpora eſſe heterogenea; quatenus non innumerabiles punctorum myriades unicam certiſſimam lineolam, non millies millenæ ſuperficies unicum excedant minutiſſimum corpuſculum. Sic & anguli plani κεραϛοειδῆς, ſi modò anguli ſunt, aut quomodocunque quanti, quorum utrumque dubitatur & denegatur a præclaris Mathematicis, de qua re nihil ego quicquam in præſens diſceptabo; at ſaltem, inquam, ſi corniculares iſtæ divergentiæ, quas efficiunt rectæ lineæ cum curvis quas contingunt ſint verè anguli, quantitate præditi, rectilineis ſaltem angulis homogenei non erunt; quia minimus quilibet vel acutiſſimus angulus rectilineus infinitis vicibus excedit innumerabiles iſtos κεραϛοειδῆς· ſicut Euclides de corniculari quem efficit tangens cum peripheria circuli, Apollonius de illis quos efficiunt tangentes cum ſectionibus conicis, * Archimedes de iis, quos conſtituit tangens cum ſpirali demonſtrârunt, nóſque poſſimus unicâ demonſtratione univerſali, è motuum compoſitione petitâ, de omnibus ad eaſdem partes convexis curvis demonſtratâ dare: ſic ut non aliter iſti contactûs anguli ſe habeant ad angulos rectilineos, quàm punctum ad lineam, vel linea ad ſuperficiem. Lineæ verò omnes finitæ quantumvis diſſimiles ſibimet ho-

* *Saltem ex demonſtratis ab eo conſicitur id.*

homogeneæ ſunt, nedum rectæ rectis, at curvæ rectis, & curvæ quævis inter ſe; quatenus tametſi de curvarum plerarumque determinatis ad rectas proportionibus (ut peripheriæ circularis aut ellipticæ ad aliquam è diametris) nondum conſtet, in dubium tamen ſit aliquam inter eas proportionem exiſtere; quia nempe v. g. diameter circuli quater acceptus circumferentiam excedit. Quinimo quod ſibi gratuletur habet præſens ætas, in eo quòd humano quam ingenio crediderunt, aut valde ſuſpicati ſunt, imperveſtigabilem anteriores Geometræ, quarundam curvarum ad rectas proportionem mirifica ſubtilitate adinvenerint, ſatiſque perſpicuè demonſtrârint hodierni Geometræ. Pariter ſuperficies omnes finitæ ſuperficiebus finitis homogeneæ ſunt, etiam planæ curvis quandoquidem harum ad illas proportio non ſolùm poſſibilis adſtruitur, at qualis ſit facilè demonſtratur, ſicut ab Archimede cui circulari areæ planæ recti coni recti cylindri, ſphæræ, ſphæricæque cujuſvis portionis curva ſuperficies adæquatur. Conſimiliter & omnia ſolida ſolidis finitis homogenea ſunt. Imò ſi anguli omnino quanti ſunt, & æqualitatis vel proportionis participes (quod ut diximus ambigitur) etiam anguli rectilinei curvilineis nonnullis homogenei erunt, hoc ſenſu, quoniam ex iſtis aliqui horum nonnullis æquales demonſtrantur, à Proclo ſcilicet libro tertio ad axioma duodecimum. Saltem verò homogenei ſunt inter ſe cuncti anguli rectilinei. Hæc autem adeò manifeſta viſa ſunt Archimedi, ut non dubitârit aſſumere quòd quævis determinata ma-

gnitudo poſſit multoties adjecta ſibi, vel aliquoties multiplicata quamvis aliam ejuſdem claſſis magnitudinem ſuperare. Ἔστω (inquit in præſtratis libro nobiliſſimo de ſphæra & cylindro, hoc eſt, præterea aſſumo) τῶν ἀνίσων γραμμῶν ἡ ἀνίσων ἐπιφανειῶν, ἢ ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συνιθέμενον ἑαυτῷ ἑαυτοῦ δυναμένου ἐστὶν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. Cui ſimile poſtulatum præmittit Clavius elemento decimo: Poſtuletur quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamvis magnitudinem ejuſdem generis excedat. Nec minus evidens eſt tempora quævis finita temporibus finitis homogenea eſſe, quia breviſſimum minutum ſæpiùs replicatum longiſſimum quodcunque ſuperabit æternitate minus durationis intervallum. Etiam velocitates omnes homogeneæ ſunt, quatenus utcunque perexiguus & pluſquam teſtudineus velocitatis gradus ſatis multis vicibus repetitus, rapidiſſimam primi mobilis velocitatem tranſcendet. (Cùm & alioquin repugnare videatur infinitam dari velocitatem; ſiquidem eâ prædituum mobile diſtantiam in unico πανῦν quantamvis emetiretur, adeſque plura ſimul loca poſſideret, hoc eſt, congrueret ſpatio ſeipſum quantumlibet excedenti, quod videtur impoſſibile). Numeri verò poſſunt omnes invicem eſſe homogenei, quatenus omnes ejuſdem generis magnitudinibus repræſentandis apti nati ſunt inſervire; poſſunt etiam quicunque ſibi mutuò heterogenei cenſeri, quatenus diverſi generis quantis exprimendis adhibeantur; imò quilibet numerus

quo-

quodammodo poteſt heterogeneus eſſe ſibimetipſi, quatenus idem heterogenea quanta repræſentet; nullus enim numerus eſt qui non linearis, planus, ſolidus, planoplanus, planoſolidus, ſolidoſolidus, eſſe poſſit; qui non dimenſiones quaſcunque naturales aut fictitias ſubire concipiatur, pro computantis arbitratu. Pondera verò modò ſolis ſolidis corporibus gravitas aſſignetur (ut certè ſolis aſſignatur in Phyſica) ſunt inter ſe omnia homogenea; ſin ſuperficiebus & lineis ut magnitudo quædam, ita gravitas nonnulla tribuatur (id quod ſupponunt Geometræ, dum trianguli, parallelogrammi, plani parabolici, reliquarúmque planarum figurarum; neque non ſuperficies ſphæricæ, conicæ, cylindricæ, & reliquarum curvarum ſuperficierum; item dum linearum quarumvis, ſeu curvarum ſeu ex rectis compoſitarum, centra gravitatis inveſtigant; hoc, inquam, poſito) non omnia pondera ſunt homogenea, ſed illa tantùm quæ ejuſdem generis magnitudinibus inhærent. Unde non immeritò Platonem reprehendere videtur Ariſtoteles, quòd (in Timæo) corporum in gravitate differentias aut exceſſus imputat τῷ πλήθει τῶν ὄγκων. Siquidem ſuperficierum ſiquæ ſunt gravitates quotlibet aggregatæ corporis gravitatem conſtituere nequeunt vel adaugeri, diverſi generis cùm ſint, nec eapropter ad hoc idoneæ. Nec aliò ſanè tendunt hæc omnia, quàm ut ſciamus quæ quanta quibus quantis ſecundùm quantitatem conferre liceat; nullum enim in Geometria majus peccatum eſt, quàm heterogeneorum quantorum inter ſe rationem

De Cælo, III. 1.

inquirere vel asserere. Ut si quis quærat quot tantæ lineæ rectæ æquentur tali quadrato; quot peripheriæ tantæ circulares tali circulo, quot quadrata tali cubo, quot tempora tali spatio vel ponderi. Unde summus artis analyticæ præceptor Vieta, primam hanc in omnibus disquisitionibus analyticis observandam legem præscripsit; *Primi & perpetua lex æqualitatum seu proportionum esto, quæ quoniam de homogeneis concepta est, dicitur lex homogeneorum, hæc est, Homogenea homogeneis comparari* (exclusivè nimirum, homogenea solis homogeneis comparari). *Nam* (subjicit) *quæ sunt heterogenea quomodo inter se adsecta sint cognosci non potest, ut dicebat Adrastus.* Rectè sic Adrastus* apud Theonem Smyrnæum, Τὰ μὲν γὰρ ἀνομοιογενῆ, πῶς ἔχει πρὸς ἄλληλα, φησὶν Ἄδραστος, εἰδέναι ἀδύνατόν. Verum est apud illos, qui in problematum solutionibus aut demonstrationibus theorematum præclaram illam adhibent methodum indivisibilium, ejusmodi sæpe voces occurrere; Omnes illæ lineæ parallelæ tali plano æquantur, summa planorum istorum parallelorum tale solidum constituit; explicant verò mentem suam, & per lineas nil aliud intelligere se dicunt, quàm admodum exiguæ & inconsiderabilis (verbo veniam) altitudinis parallelogramma; per plana consimiliter altitudinis haud computandæ prismata vel cylindros. Aut saltem per summam linearum & planorum non summam denotant aliquam finitam & determinatam, sed infinitam aut indefinitam rectæ cujusdam lineæ punctis ἰσάριθμον. Ex quali infinita inferiorum homogeneorum summa componi

Isag. cap. 3.

* Cap. 19.

su-

ſuperiùs heterogeneum (ex infinitis puta lineis rectis ſuperficiem planam, ex infinitis peripheriis concentricis circulum planum, ex infinitis ſuperficiebus planis vel curvis ſolidum corpus) ſi quis aſſerat id quod magnus ille Galilæus aſſerere non dubitat, haud facile poterit erroris convinci, vel funditus expugnari. Sed utcunque, dimiſsâ iſtâ controverſiâ, nihil uſus iſte noſtræ quicquam officit doctrinæ, & vel illorum qui methodum iſtam ambabus ulnis amplexantur, ſententiâ irrefragabiliter valet hoc præceptum, ne definita quantitate vel numero heterogenea comparentur inter ſe. Quod cùm ex ſe liquidò verum & ſummopere rationi conſentaneum ſit, de eo tamen, ut ex parte jam antè monui, movit nuper controverſiam noſter D. Hobbius, & rem adeò claram ſpiſſis quantum in ſe nebulis offuſcavit. Nec enim lineas & tempora, quamvis inter ſe diſſitiſſimæ naturæ, velut homogenea quanta, mutuámque ſortita proportionem veretur inter ſe comparare. Nam quia motibus ἰσοτάχεσι percurſæ longitudines ſe habent ut tempora, *Erit* (inquit) *permutando ut tempus ad longitudinem, ita tempus ad longitudinem.* Quaſi diceret, Quoniam ſtadius ad mille paſſus ſe habet, ut hora una ad octo horas; ergo permutatim ut ſtadius ad unam horam, ita mille paſſus ad octo horas; cujuſmodi argumentatio nemo non perſpicit quam ſit abſonè ridicula. Idem in Dialogis, quibus hodiernā examinare profitetur & emendare Mathematicam (exoptare liceat, utinam ſaltem penſitatiùs examinàſſet, & feliciùs emendàſſet ſuam) *Erit*, inquit, *ut quantitas ponderis ad longitudinem lineæ quæ*

De Corp. cap. 16.

Dial. 3. p. 80.

ipſam repræſentat, ita quantitas ponderis dupli ad longitudinem lineæ duplæ ipſam repræſentantis. Adeo ſcilicet hunc errorem à redargutore ſuo monitus omnino recuſat deponere; aſt ejus excuſandi vel propugnandi gratiâ novas procudit vocabulorum definitiones & acceptiones, tam ſibi parum conſonas, quàm ab uſu communi ſemotas, & concluſionibus plerunque ſuis repugnantes; miros comminiſcitur prætextus alienos & abhorrentes ab omni ſyncera ratione, quod paucis oſtendere non abs re fuerit, cùm elucidandæ rei ſubjectæ causâ, tum ne quis in ſimiles lapſus incautè ruat & quò pateat quàm in his rebus oportet circumſpectè verſari. Menſuram hoc modo definit ille, *Eſt menſura magnitudo una alterius, quando ipſa vel ipſius multipla alteri applicata cum ea coincidit.* Et rurſus, verbis paululum immutatis, ſed in eandem mentem; *Menſura eſt magnitudo magnitudinis minor majoris vel num minoris, cùm minor ipſi applicata ſemel vel pluries ipſam æquat.* Juxta quas definitiones patet menſuram nihil eſſe aliud, quam rei menſuratæ partem aliquotam, quæ nimirum aliquoties accepta totam illam exhaurit, ut nihil ſuperſit reſi lui; quomodo vocabula μέτρον, μετρεῖν, καταμετρεῖν, ſæpiùs aut ſemper accipiuntur in Elementis, ut antehac oſtenſum; *Homogeneas porro quantitates* definit, *quarum menſuræ applicari poſſunt una ad alteram, ita ut congruant.* Et *quarum menſuræ* ἐφαρμόζουσι. Menſuræ verò ſunt ei, ut jam viſum, partes quantorum aliquotæ. Ergo modo ſibi conſtet, quantitates homogeneæ erunt, quarum partes aliquotæ congruere poſſunt. Verùm par-

Dial. 1. p. 11.

Dial. 2. p. 43.

Pag. 110.

Dial. 3. p. 80.

partes aliquotæ quantitatis temporis non aliæ ſunt quàm quantitates temporis, nec ponderis quàm quantitates ponderis, nec lineæ quàm lineæ, neque corporis quàm corpora. Ergo cùm nemo concipere poſſit quo pacto quantitas lineæ quantitati temporis (puta lineæ quantitas cubitalis annuæ vel unciali temporis aut ponderis quantitati) poſſit applicari, ſic ut ei congruat aut coincidat; non erunt lineæ temporis & ponderis quantitates homogeneæ, juxta proprias ipſius definitiones ac hypotheſes. Ita communis intuliſſet Logica, verùm mirificâ ſagacitate contrarium is colligit; *Quoniam* (inquit) *quantitas temporis per lineam menſurari poteſt, & linea lineæ applicari poteſt, erit quantitas temporis quantitati lineæ homogenea.* Ecce fontem, ex quo complura quibus iſti dialogi ſcatent abſurda promanàrunt. *Quoniam quantitas* (ait) *temporis per lineam menſurari poteſt:* atqui reſpice ſodes, ingenioſe vir, tuam ipſius definitionem, & vide num juxta illam linea poſſit eſſe menſura temporis (aut quia malis involutiùs loqui, quantitas temporis) hæc linea poſſit eſſe pars aliquota quantitatis temporis, vel an quantitas temporis confletur ex lineis, vel an linea ſit aliqua quantitas temporis (pars enim aliquota quantitatis temporis eſt aliqua quantitas temporis) pariq; ratione num linea ſit quantitas ſuperficiei, corporis, ponderis, & alterius cujuſvis quanti; vel an omnes omnino quantitates componantur ex lineis; quantitas (inquam) annua vel menſtrua, quantitas uncialis aut pondialis, quantitas pedalis quadratica vel cubica num lineæ ſint, aut conſtituantur ex lineis: an- *Dial. 5. p. 11 c.*

non ſi quid horum ſtatueris audienti debebis ludibrium? Atqui non ſatis animadvertit clariſſimus vir, in uſu vocabuli menſuræ ſe multùm à ſua ipſius definitione recedere, eóque ſibi labendi occaſionem miniſtrare; quúmque toties lineam appellat menſuram temporis, & ponderis, & cujuſcunque quanti, nullatenus intelligere poteſt lineam eſſe partem aliquotam temporis, aut ponderis, aut motûs, aut corporis, neque cum iis lineam poſſe congruere; ſed laxiori menſuræ ſignificatu abutitur, juxta quem, ut antea diſtinctiùs expoſuimus, menſura ſubinde rem quamlibet deſignat, quæ poſſit aliam vel commodè repræſentare, vel quomodocunque notificare. Quo duplice reſpectu linea (recta præſertim aut circularis ob ſimplicitatem & uniformitatem ſuam) temporis, ponderis, velocitatis & cujuſvis quanti menſura dici poteſt & ſolet. Nam quia ratio quævis quantorum rectis lineis exprimi poteſt, ideo ſatis commodè rectæ lineæ eis repræſentandis adhibentur; ut v.g. pro duobus ſolidis, quorum unum ad alterum proportione ſic ſe habet, ut $\sqrt{2}$ ad 1, vel ut diameter quadrati ad latus, quando præter ipſarum proportionem nihil obvenit conſiderandum, ſubſtitui poſſunt duæ rectæ lineæ ipſarum rationem exhibentes; pariquè ratione duorum temporum, vel duorum ponderum rationibus exhibendis aſſumi poſſunt rectæ lineæ; & eatenus acceptione latiſſimà quantorum iſtorum menſuræ dicantur hæ lineæ; quo ſenſu numeri ſunt menſuræ maximè communes & uſitatæ quantorum omnium commenſurabilium, eorum rationem exprimentes,

pro-

próque iis in ratiocinii decursu substitutæ; quomodo etiam nedum lineæ, sed alia quævis quanta aliorum quorumvis respectu mensuræ rationem subeant; sicut enim quodcunque quantum rectà lineâ pro arbitrio sumptâ repræsentari potest, ita possit æquè superficie quavis, possit corpore, possit literâ, charactere, nomine quolibet designari. Magis adhuc propriè, quamvis ab Hobbiana definitione satis remotè, mensuræ nomen obtinet recta linea (paríque jure quævis alia magnitudo posset obtinere) quatenus inservire potest aliorum quantorum quantitati determinandæ seu declarandæ; quomodo longitudo lineæ, quam percurrit aliquid mobile designato tempore velocitatem indicat, adeóque metitur ejus; & arcus circularis anguli rectilinei cruribus interceptus anguli quantitatem arguit & ostendit, hoc est, mensurat secundùm hanc acceptionem τοῦ mensurare, quam nos fusè satis & luculentè pridem explicuimus. Hanc igitur ambiguitatem vocabuli mensuræ si perspexisset is aut perpendisset, quocum agimus; aut si definitioni propriè constantiùs adhæsisset, non ita puto commiscuisset omnium rerum quantitates, & inter se pronunciásset homogeneas, ejusmodi scilicet argumento permotus. Quoniam linea est mensura temporis, erit quantitas temporis quantitati lineæ homogenea. Atqui respondeo, linea dici potest mensura temporis, sumendo mensuram pro symbolo, vel argumento, vel indicio quantitatis quam habet tempus; at sumendo mensuram juxta suam ipsius definitionem pro parte aliquota, satìs liquet, nec ipse diffitetur,

Pag. 77.

tetur, lineam non esse mensuram temporis, adeóque juxta suam etiam homogenei definitionem, lineæ quantitas non erit temporis quantitati homogenea. Imò, eodem ratiocinio quo probatum it temporis & lineæ quantitates homogeneas esse, atque concluditur easdem esse heterogeneas. Quia nempe quantitas temporis per superficiem parallelogrammam aut corpus cylindricum mensurari (hoc est, per ea designari potest, & declarari vel notificari) & linea nequit superficiei parallelogrammæ nec corpori cylindrico congruere, erit juxta definitionem τῆ ἑτερογενείας ab ipso traditam, quantitati lineæ heterogenea. Quinetiam omnes omnino quantitates simul homogeneæ
Pag 47. sunt & heterogeneæ : nam, *Homogeneæ sunt* (ait) *quæ eodem genere mensuræ mensurabiliæ* ; ergo cùm omnes quantitates lineis mensurabiles sint, erunt omnes homogeneæ. *Heterogeneæ verò sunt* (ut idem ipse nos docet) *quæ diverso genere mensuræ mensurantur* : ergo heterogeneæ sunt omnes quantitates, quoniam omnes lineis, superficiebus, solidis angulis, (numeris pleræque rationalibus aut surdis) mensurari possunt, eo nempe modo quo mensuram accipit ipse, dum suos struit paralogismos. Et sanè cuncta ejus huc spectantia ratiocinia laborare videntur hâc unà τῆ ἀμφιβολίας fallacià : etenim revera quæ eodem genere mensuræ determinantur homogenea sunt, sumendo mensuram pro parte, vel aliquo congruo rei mensuratæ ; sed non semper homogenea sunt, quæ eodem genere mensuræ mensurantur, sumendo mensuram pro signo vel argumento ; ita certè nulla foret

ret quantorum heterogeneitas, & facilè confecta res esset. Cæterum ex his angustiis eluctari se posse sperat, rerum quantitates ab ipsis quantis perquam subtiliter distinguendo. *Quantitas* (inquit in Abstracto) *cujuscunque rei quantitati in abstracto cujuslibet alterius rei homogenea est, ideóque linearum, superficierum, solidorum, temporis, motûs, vis, ponderis, roboris, resistentiæ quantitates sunt homogeneæ, etsi res ipsæ sunt heterogeneæ.* Rursus, *Video jam quamquam absurdum sit lineam dicere tempori æqualem esse, non tamen absurdè dici quantitatem lineæ æqualem esse temporis quantitati.* Alibique passim hoc inculcat mirificum commentum. Quo tamen nil efficit; verba tantùm dat nobis, aut potiùs sibi. Quòd enim per quantitatem istam abstractam ab ipsis linea & tempore distincti nihil animo concipiat ipse, quovis ausim pignore cum illo contendere. Quid est, obsecro, quantitas lineæ, præter ipsius lineæ singularem & determinatam magnitudinem, vel ipsa linea quà sic determinata? Quid quantitas temporis, nisi definita sui generis extensio, vel ipsum tempus quatenus taliter extensum? Ergo si linea & tempus heterogenea sunt, etiam ipsorum quantitates heterogeneæ erunt. Tempus & lineam esse res heterogeneas, non solùm ut res physicas, sed ut Mathematicæ contemplationi subditas, rei nimiâ coactus evidentiâ vix diffiteatur ipse; at quomodo? non utique ceu calida vel frigida, nigra vel alba, sed ut quanta; nec enim aliter ea considerat Mathematicus. Quamobrem? quia nullam habent σχέσιν, non comparari queunt inter se κατὰ ποιότητα

Dial. 3. p. 81.

Pag. 77.

(nos

(nos ut veridicus docet Euclides) quia scilicet non eodem modo quanta sunt, at diversi generis quantitatem habent; vel quia sine magna dici nequit absurditate, tantum, est tempus quantum est linea, tantus est annus quantum est stadium. Ergo quantitates temporis & lineæ sunt diversi generis. Verum reponit, quantitas temporis à linea mensuratur: ita dico rursus, æquivocè sumendo vocabulum mensurare; nempe non mensurat ut pars illius quantitas, aut duntaxat ut signum causale vel consequens; ex quo nihil in ejus rem concludatur. Addo, nec admodum propriè quantitatem temporis mensurari, sed ipsum potiùs tempus ut quantum mensuratur, vel quoad quantitatem; sicut non tam videtur albedo, quàm corpus quatenus album, seu propter albedinem, hoc est, quia taliter disponitur, ut tali modo visum afficiat. Unde nec juxta definitionem ejus, Homogenea sunt quorum mensuræ congruunt, quantitates abstractè sumptæ sunt homogeneitatis bene capaces; quia non ipsæ mensurantur, at concreta potiùs quanta propter aut quoad ipsas; & sanè propter ipsas etiam homogenea sunt, aut heterogenea Mathematicè. Verum adhuc instat, temporum rationes rectè comparantur cum linearum rationibus; dicitur enim, Ut se habet annus ad biennium, ita linea pedalis ad bipedalem; quidni igitur quantitas temporis cum lineæ quantitate conferatur? At quàm immanis est ἀλογία ejusmodi ratiociniis, cum plurium rationum similibus rationibus absolutas simplicium quantitates confundere? Ex eo nimirum quod ovum se habet ad duo ova,

sicut

ſicut angelus ad duos angelos; vel quòd unius ovi ad duo ova talis ſit relatio, qualis unius angeli ad duos angelos, quomodo inferatur ullo modo ovi & angeli ſimiles eſſe, vel homogeneas quantitates? vel quòd quantitatibus ovi & angeli eadem menſura congruat? vel quòd angelus ullam omnino poſſideat abſolutam quantitatem? At hujus & præcedentis inſtantiæ nulla prorſus eſt diſparitas. Non ovum ovo, quod aiunt, ſimilius. Ita ſcilicet uſu venire ſolet, ut qui ſuos errores extenuare vel defendere malunt, quàm ingenuè confiteri, nedum non declinant eos, at plures ſæpiùs, eóſque prioribus deteriores accumulent. Sed excidit mihi verſus ritè adagialis,

Μὴ κινεῖν καμαρίναν, ἀκίνητον δὲ μένειν.

Maneat autem quoniam temporis quantitas (annua ſcilicet, menſtrua, diurna) cum lineæ longitudine (pedali, cubitali, ſtadiali) ſecundùm æqualitatem aut inæqualitatem, exceſſum aut defectum, additionem vel ſubductionem nequit appoſitè comparari, illa penitus eſſe homogenea; neque non eodem modo affecta reliqua quanta, nec à Mathematicorum hac in parte communi ſententia atque ſermone diſcedendum eſſe. Quòd ſi hæc vocabula nonnunquam aliter occurrant uſurpata, ut ſi quis propter naturæ ſubalternam quandam diverſitatem, lineas curvas rectis, aut ſuperficies gibbas planis heterogeneas dicat; quomodo Ramus angulos rectos rectilineos obliquis rectilineis heterogeneos dicit (paríque ferè de cauſa potuiſſet quadrantem peripheriæ circularis ſextanti, lineam pedalem ſemipedali heterogeneas ap-

appellare); aut si propter convenientiam aliquam peculiarem genere disjuncta quanta vocentur homogenea; quomodo recens quidam Geometra, alioqui non ineruditus, parallelogrammum & cylindrum homogeneas figuras appellitat; eò quòd in hoc lineæ rectæ basi parallelæ simili tenore procedunt, quo circuli paralleli in illo; quod is vocat per elementa proportionalia procedere. Tales (inquam) καινοφωνίας & peregrinas vocum novitates limpidissimis hisce scientiis caliginem & confusionem inducentes cavere præstat & respuere; multóque satius esset exprimendis sensibus nostris nova vocabula confringere, quàm veteribus usu sancitis abuti. Sed manum de hac tabula. Cogitáram his de quantorum ὁμογενείᾳ & ἑτερογενείᾳ disputatis circa iplorum ὁμοιότητων & ἑτεροιότητων (similitudinem & dissimilitudinem) quædam subjungere. Sed cùm currentis impetu calami præstitutas etiamnum temporis metas fuerim prætervectus, sufficiat ita jam ad illas, quæ cùm opportuna se præbuerit occasio, proximè consequentur de quantorum analogia disquisitiones utcunque viam muniviſſe. Vos interim bene valeatis precor, optimi & humaniſſimi auditores.

Ant. Farbius.

LECT.

LECT. II.

PRo more meo, poſthabitis prooemiis, & ambagibus omnino prætermiſſis (poſtquam tamen vobis, auditores optimi quotquot eſtis, omnimodam ſalutem & gratulatus fuero præſentem, & diu futuram exoptavero) ad rem me confero protinus; & diutiùs intermiſſum penſum in manus reſumo. Liceat autem bona veſtra cum venia pridem inſtitutæ methodo inhærere, quódque reliquum eſt ſuſceptæ circa Matheſeôs προηγούμενα tractationis detexere; quæ quidem ſpero fore cum hoc termino ut penitus abſolvatur, quódque poſtquam tamdiu circa littus hæſimus, & horam quaſi ſcientiarum oras legimus, in altum tandem æquor provehemur. Quanquam revera quas modò diſcutiendas aggredimur materiæ, ſive ſubtilitas ipſarum, ſive ſpectetur utilitas, vix illæ multùm abeſſe videntur ab intima profundiſſimáque Matheſi. Veniunt ſiquidem imprimis conſiderandæ ratio vel proportio, tum analogica ſeu proportionalitas; circa quas nimirum aliquatenus univerſa Matheſis occupatur, vel ut objecta ſua, vel ut inſtrumenta inveniendi ac demonſtrandi; nec analogiam proinde immeritò vir divinus in opere diviniſſimo (Timæum intelligo) cenſuit, δεσμὸν καὶ συνοχεῖς μαθημάτων (vinculum & commiſſuram Mathematum, an diſciplinarum potiùs omnium). Nec inde abit il-

Theon Smyr. p. 131.

Plato Tim. p. 1048.

illustrissimus author præclaræ de methodo utendi ratione diatribæ: *Quia* (ait) *animadvertebam illas* (particulares nempe scientias quæ Mathematicæ dicuntur) *etiamsi circa diversa objecta versarentur, in hoc tamen omnes convenire, quod nihil aliud quàm relationes sive proportiones quasdam, quæ in iis reperiuntur, examinent, has proportiones solas mihi esse considerandas putavi* Addo Eratosthenem pronunciantem, Πάντα τὰ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐξ ἀναλογίας ποσῶν τινῶν συνεστῶτα. Adeo proportionum consideratio disciplinas hasce pervadit, & quodammodo complectitur universas. Non igitur ipsarum videri debemus tam extimam cutem lambere, quàm medullam intimam degustare, dum proportionum naturam contemplamur. Succedet huic διαφορὰ de magnitudinum situ vel positione determinata, qui, simul cum ipsarum proportione, figurarum varia similimilitudo constat, & multifaria diversitas; tum de consequentibus has magnitudinum species, seu convenientiis ac differentiis specificis; dein de motu quo progenerantur magnitudines: de his (inquam) succedet dispicere. Ita postquam pleraque, præcipua saltem, omnia magnitudinum symptomata, quæ Mathematicis quidem substernuntur, aut implicantur hypothesibus, utcunque perlustravimus, in eam, à qua primitùs digressi sumus, orbitam revertentes, de hypothesibus ipsis & reliquis principiis particularia quædam, quæ se suggesserint observatu digna, licebit in medium producere. Quibus defuncti negotiis ad id quod, ni male memini, jam olim polliciti sumus conferemus operam, ut Mathematicæ sci-

Pag. 18.

Theon. cap.

ſcilicet inventionis modum exponamus. Erit autem quòd gratulemur nobis, ſi propoſitum hoc ſtadium hujus intra termini decurſum emetiri, vel utcunque ex animi ſententia conficere poterimus. His in anteceſſum prælibatis ad rationem ſeu proportionem excutiendam accedamus. Rationem & proportionem quod attinet (hæc enim nomina jam apud pleroſque Latinè ſcribentes *ἰσῳδύναμα* ſunt) eam Græci deſignant vocabulo λόγ☉, quo certè vix ullum ſuccurrit in iſta lingua magis anceps & *πολύσημον*. Significatus ejus quàm plurimos recenſere non abs re putavit Theon Smyrnæus expoſitione eorum quæ ad Platonis lectionem neceſſaria ſunt. Ego verò nimium philologus, & ἔξω λόγου, hoc eſt, extra propoſitum viderer evagari, ſi vel exſcribens eum vel imitans (quod in promptu foret eò connitenti) percenſere pleroſque ſtuderem & exemplis confirmare. Nemini non notum eſt, quòd vocabulum λόγ☉ communiter utcunque ſermonem mentis *ἐνδιάθετον*, & oris *προφορικὸν* (ita recentiores diſtinguunt Peripatetici) ſermonis, inquam, utriuſque, tum conceptivi tum prolatitii, tam facultatem operatricem quàm operationes ipſas, nec non immediatos effectus ab eo manantes denotet ac exprimat, præſertim quicquid horum cum diſcurſu jungitur ad hominis naturam appropriato, qui ſolus inter animantia cenſetur *ζῶον λογικὸν*, animal ſermocinativum vel diſcurſivum. Neque magis quenquam fugit literis mediocriter imbutum, quòd peculiari quadam ratione paſſim apud Græcos authores nedum ſententiæ ſingulares mente conceptæ vel *Cap.18.*

ore prolatæ, ſed plurium ſententiarum ſarragines & ſyſtemata diverſimoda ; fabulæ nempe vel apologi (hoc eſt, ſermones ex arbitrio & ingenio conficti) nugæ & offuciæ (hoc eſt, mera verba, ſenſûs vacua vel veritatis) adagia, ſeu jactatæ vulgò ſententiæ ; rumores famâ vel populari ſermone diſperſi, hiſtoriæ omnimodæ, orationes jugi ſerie pertentæ ; demum quælibet literæ λόγοι dicantur. Exempla præſto ſunt, quibus hos uſu tritos hujus vocabuli ſignificatus firmem, aſt illos lubens prætereo. Neſcio tamen an operæ ſit alias quaſdam, quas etiam in popularibus obtinet ſcriptis acceptiones, ad rem noſtram & ſenſum Geometricum propiùs accedentes paucis perſtringere. Tales ſunt quum λόγος deſignat taxationem & comparationem quamcunque rerum inter ſe, prout iſtis in phraſibus uſitatis, Ἀποδιδόναι λόγον, συναίρειν λόγον, ὑπέχειν λόγον. Exempla dant etiam Sacræ Literæ ; S. Lucas, Ἀπόδος λόγον τῆς οἰκονομίας σου. S. Matthæus, Ἔρχεται ὁ κύριος τῶν δούλων ἐκείνων καὶ συναίρει μετ' αὐτῶν λόγον. Ἀποδιδόναι λόγον, rationem reddere ; συναίρειν λόγον, rationem inire : nempe muneris adminiſtrati, vel rei cujuſvis concreditæ ; quod nihil eſt aliud quam actiones cum regulis ad quas exigendæ ſunt, ex præſcripto ſuperioris poteſtatis, vel ſummas rerum exhibitas cum iis quæ jure debentur, aut meritò expectantur comparare. Item cùm λόγος rerum valorem, pretium, meritum innuit, quomodo dici ſolet ἐν οὐδενὶ λόγῳ πίπτειν : quod negligitur, poſthabetur, vilipenditur, —— οὐδ' ἐν λόγῳ, οὐδ' ἐν ἀριθμῷ, quod in nulla ratione, nullo nu-

Luc. XVI. 2
Matth. XXV. 19.

numero est, hoc est, instar nihili habetur, in censum non venit, neutiquam computatur. Sophocles,

Οὐκ ἂν πριαίμην ἀνδρὸς λόγου βρότον,
Ὅστις κεναῖσιν ἐλπίσιν θερμαίνεται.

Non cassà nuce hominem emptitem, qui vana spe fervet. Ἐν λόγῳ θεὸς ποιεῖσθαι, dixit nonnunquam pro Deos venerari; & λόγον δικαίου ποιεῖσθαι Demosthenicum est, pro justitiam respicere vel suspicere, non pro nihilo ducere. Addo Galenum, Ἐπὶ πάντων τῶν ζητουμένων εἰς λόγον χρὴ μεταλαμβάνεσθαι τὸ ὄνομα, in omni disquisitione nomen ipsum in considerationem assumi debet. Scilicet in hujusmodi locutionibus λόγος aliquam rerum magnitudinem, vim, potentiam calculo vel æstimio subjectam signat. Paràmque videtur hinc abludere quod λόγος subinde pro causa rei vel conditione ponitur, hoc est, pro eo quod considerari debet & requiritur, ut aliquid fiat. Plato epist. 7. ad Dionis, Οἰκείως, ἦν δ' ἐγώ (inquit) ὡμολόγησα ἐπὶ τούτοις γοῦν τοῖς λόγοις, his conditionibus huc me venturum promisi. Δέχεσθαι λόγον, usitatur à Demosthene pro causam agnoscere, vel conditionem accipere. Εἰς λόγον ἀρετῆς, propter virtutem affici præmio, vel laude decorari. Et εἰς λόγον κακίας, pro vitio luere pœnas, vituperio defamari, sunt oratoribus Græcis in usu loquendi formulæ: propter virtutem & vitium, hoc est, ex virtute vel vitio consideratis, juxta moralium præceptorum normas examinatis. Eo tantùm hæc attuli quò constaret à Geometris adhibitum hujusce vocabuli sensum haud ita longè recedere ab usu scriptores apud alios recepto

De Meth. Med. l. 5.

satísque pervulgato; nec abhorrere noſtram à communi more loquendi conſuetudinem. Idem oſtendi poterat de Latina voce ratio, quæ Græcam λόγον exprimere ſolet, & ſuos ab illo pleroſque ſignificatus mutuari: ſed rei nimia claritas facit (& quia nimium jam hujuſmodi parergis datum eſt) ut iſti parcam operæ. Addam ſolùm, inde videri λόγον ejuſmodi ſenſus, cùm iſtos extraneos tum peculiarem Geometris ſenſum deſumpſiſſe, quod diverſas res inter ſe comparando dicitur, effertur, exprimitur ipſarum determinatus valor, aut quantitas, ex reſpectu quem una res obtinet ad aliam. Ratio autem ducitur à ratus, hoc eſt, à reor, idem deſignante quod puto vel exiſtimo; rerúmque proinde cenſum aut æſtimium indicat ex comparatione notificatum. Quomodo etiam verbum putare, deductaque ab illo computare, ſupputare, denotat numerando vel utcunque res conferendo quantæ ſunt (magnitudine vel pretio quantæ) æſtimare: quod & Græcis dicitur λογίζεσθαι. Vox autem proportio reperitur à Cicerone aliquoties uſurpata, quanquam ſenſu non uno exactè eodem. Alias enim apud ipſum idem valere videtur quod ſimplex ratio, nonnunquam vero rationum ſimilitudinem vel analogiam deſignare: primúſque videtur ille ipſe ejus uſum adinveniſſe, ſaltem ad res Mathematicas primus applicuiſſe. Sic innuit in fragmento quod Timæus inſcribitur, vel de univerſo: verba ſunt,* *Sed vinculorum illud eſt aptiſſimum atque pulcherrimum, quod ex ſe atque de his quæ*

* Δεσμῶν δ' ὁ κάλλιστος, ὃς ἂν αὑτὸν καὶ τὰ συνδούμενα ἓν ὡς μάλιστα ἓν ποιῇ. Τοῦτο δὲ πέφυκε φιλτάτη ἀναλογία κάλλιστα ἀποτελεῖν.

quæ astringit, quàm maximè unum efficit. Id optimè assequitur quæ Græcis ἀναλογία, Latinè (audendum est enim, quoniam hæc primùm à nobis novantur) *comparatio, proportióve dici potest. Porro sæpiùs in isto libello proportionis utitur vocabulo, sensu tamen, ut videri prænonitum, aliquà vario.* Ejus autem effingendæ hinc accepta videtur origo vel occasio. Cùm in corrogandis vectigalibus, & importandis oneribus publicis, pro facultatum modo secundùm æquas leges taxato, sua cuique pars persolvenda cesserit, quæ nempe rata cujusque portio dicta est; hinc unusquisque solvere dictus pro portione, vel pro rata sua portione; hinc emersit vocabulum proportio, dignum visum Ciceroni, quum Græcas literas suo donare Latio studeret, quod λόγον & ἀναλογίαν, obvias Platonem & alios Græcos Philosophos inspectanti voces, referret & exprimeret. Sed manum ferulæ subducamus, & Grammaticorum egregii scholis videamus quid per λόγον eique respondentem rationem, & proportionem (juxta frequentiorem & probatiorem usum proportionis, nonnunquam enim analogiam significat, hoc est, proportionalitatem) intelligant ipsi Geometræ, quæque sit hujus adeò triti vocabuli genuina notio disquiramus. Permirum siquidem videatur ejusce de rei, quæ paginam ferè replet utramque, nusquámque non occurrit in Matheſi, naturam viros inter Matheseos haud in postremis peritos acriter disceptari. Quasi nesciri possit res tam obvia, toties jactata, adeò diligenter excussa. Unde proveniat hoc? Inde opinor, quòd perdifficile sit res admodum abstractas

& univerſales, præſertímque modos & relationes rerum, vel imaginari diſtinctè vel accuratè definire. Ferè neminem arbitror fore, ſaltem è gnaris Mathematum, qui non utcunque quantúmque ſatis eſt intelligat, quid velit ipſe dum profert hoc vocabulum, quídque concipiant alii proferentes ipſum; ſed non ita forſan in promptu eſt ei reſpondentem conceptum mentis, proprium vel alienum, aliis verbis explicare, hoc eſt, ipſum definire. Hinc litigandi causâ non ſecus in hac quàm in aliis pleriſque conſimilibus materiis, à ſenſu disjunctis: ſubnotavit hoc Carteſius, & inde vitio vertit Philoſophis moroſam illam verba definiendi curioſitatem, iſtis verbis; *Non hîc explico multa nomina, quibus jam uſus ſum vel utar in ſequentibus, quia per ſe ſatis nota videntur. Et ſæpè adverti Philoſophos in hoc errare, quòd ea quæ ſimpliciſſima erant, ac per ſe nota Logicis definitionibus explicare conarentur; ita enim ipſa obſcuriora reddebant.* Princ.I.10. Quæ ſubtiliſſimi viri obſervatio vel inde validiſſimè confirmatur, quòd circa definitiones iſtas rarò convenit inter illos, qui ſaltem nulli ſectæ nomen ſuum addixerunt; at quam unus probat, alter reſpuit, & vel minùs aptam, aut non ſatis accuratam judicat definitionem. Ut & exinde quòd illorum abſtractiſſimorum nominum definitiones rarò vel nunquam demonſtrationes ingrediantur; nec inſerviant (qui tamen primarius definitionum uſus eſt & ſcopus) concluſionibus eliciendis; inſtantiæ causâ, jam obiter, ſed opportunè, adnoto definitionem τῶ λόγε traditam in elementis, nuſquam in toto elementorum ſyſtemate, nec alibi (quòd ſciam

am, imò districtè aio non alibi) quovis in libro Mathematico citatur astruendæ ulli demonstrationi, vel conclusioni deducendæ. Suppeditet alterum exemplum vox διάστημα veteres apud Musicos, quod ex iis nemo non definit, at verbis discrepantes, & sensu nonnihil varii à se omnes : apparebit id Aristoxenum, Euclidem, Nicomachum, Bacchium, Aristidem, Gaudentium, Capellam, si cui ad Inbitum erit, inspectanti. Sed rem adoriamur propiùs. Adnotanda verò primùm occurrit ambiguitas, vel distinctio quædam, cui subjacent vocabula ratio & proportio, etiam prout illa usurpantur à Mathematicis ; Latinorum (inquam) vocabulorum, nam Græcum λόγος, ut existimo, non agnoscit istam homonymiam. Duplex igitur à quibusdam statuitur ratio vel duplex proportio, uni nomen indunt Arithmeticæ, alteri Geometricæ rationis vel proportionis. Quibus explicandis prænotetur imprimis rationem utramque, quæ dicitur cùm duorum homogeneorum quantorum comparationem innuat qualemcunque, ad classem istam seu categoriam entium spectare, quæ πρὸς τι πρός τι Aristoteles, alii relationes vel habitudines, Græci σχέσεις indigitârunt. Quorum duorum quantorum seu terminorum (terminum enim vocant Mathematici horum correlatorum quantorum utrumvis : Ὅρος (inquit Theon Smyrnæus) ὁ τὸ καθ' ἕκαστον ἀποφαίνων ἰδιώμα τῶν λεγομένων, οἷον ἀριθμὸς, μέγεθος, δύναμις, ὄγκος, βάρος. Terminus est qui peculiarem dictorum naturam, seu proprietatem exprimit, ut numerus, magnitudo, moles, pondus. Et alibi clariùs,

cap. XX. rius, "Ορος ὃ λέγομεν τὰ ὁμογενῆ, ἢ ὁμοειδῆ λαμβανόμενα εἰς σύγκρισιν· Terminos dicimus quæ cùm genere vel ſpecie conveniant, in comparationem adſumuntur. Horum (inquam) duorùm terminorum in comparatione prior appellari conſuevit ἡγούμενον antecedens, ei verò correlatus poſterior ἑπόμενον conſequens. Hoc præmiſſo, Arithmeticam rationem ſeu proportionem, appellant nonnulli duorū quantorum, Τὸ κατὰ τὸ ὑπερέχειν καὶ ἐλλείπειν φέσιν (verba ſunt Scholiaſtæ veteris à Meibomio citati) relationem ſecundùm differentiam, quatenus unum excedit alterum, vel deficit ab altero (poſſit adjici κατὰ τὸ ἰσάζειν, adæquari, ſibi vel nihilo differre; nam & inter æqualia quanta poteſt inſtitui comparatio, potéſtque ſingularis hæc ipſorum relatio denotari per τὸ differre nihilo, quod inter exceſſum & defectum medius interjicitur limes). Per differentiam autem hîc intelligimus ipſum τὸ διαφέρειν, ſingulari modo comparari vel referri hoc ad illud, non abſolutum id quantum, quod poſt unius ab altero ſubductionem eſt reſiduum, quod quidem διαφορὰ & differentia plerunque dicitur. E.g. relatio quæ verſatur inter lineam tripedalem & lineam bipedalem, juxta quam illa ſuperare concipitur hanc lineâ pedali; vel inversè, relatio bipedalis ad tripedalem, quatenus illa concipitur ab hac deficere quantitate lineæ pedalis, appellantur rationes Arithmeticæ, illa exceſsûs, hæc defectûs; ipſa verò pedalis linea, abſoluta magnitudo, quamvis differentiæ nomine venire ſolet, attamen ratio non eſt; ſed hæc excedere vel deficere ratio dicitur Arithmetica. Hanc talem

talem (aio) quantorum habitudinem ad ſe invicem nonnulli rationis Arithmeticæ donant appellamento. (Cur Arithmeticam dixerint non jam diſputabo, res quippe controverſa eſt; tantùm inde ſic denominatam videri dicam, quòd analogiam quandam veteres Arithmeticam appellârint, qua de cauſa tum diſpiciendi locus erit, cùm de analogiis agemus). Verùm apud Græcos nuſquam reperio λόγον aliquem Arithmeticum; ſemper ii quantorum λόγον contra diſtinguunt ab ipſorum differentia, quæ ſignificant vocabulis διαφορὰ & ὑπεροχὴ, nec rarò διάστημα nuncupant (intervallum, ſpatium, diſtantiam, non ex poſitione locali reſultantem innuentes intercapedinem, aſt diverſitatem & quaſi diſtantiam in quantitate, per quam unum abeſt ut alteri ſit æquale; determinatam quandam ab æqualitate remotionem) per λόγον autem (ut opinor) perpetuò deſignant illam quantorum σχέσιν, quæ dici ſolet ratio Geometrica, vel ratio ſimpliciter. Apud omnes enim cùm ratio ponitur ἁπλῶς, & ab epitheto libera, ratio intelligitur Geometrica, hoc eſt, ea σχέσις juxta quam unum quantum alterius totuplum vel quaſi totuplum concipitur (ita continere aliud, vel ita contineri in alio, ſicut numerus iſte continet alium, vel continetur in alio; vel ſaltem ſicut expoſitorum duorum quantorum illud continet hoc, vel continetur in hoc) quo pacto v.g. relatio lineæ tripedalis ad bipedalem, juxta quam illa ſemel hanc, & ejus inſuper ſemiſſem concipitur includere; vel ad hanc ſe habere, ſicut numerus ternarius ad binarium, dicitur ratio Geometrica, vel ratio

tio (ſimpliciter) ſeſquialtera: inverſéque relatio lineæ bipedalis ad tripedalem, juxta quam illa duas hujus partes efficit tertias, vel ſe habet ad hanc ſicut numerus binarius ad ternarium, dicitur ratio ſeſquialtera. E quibus utcunque liquere poteſt, quantum interſit diſcriminis inter haſce duas relationes, Arithmeticam & Geometricam, quas appellitant. Valde differunt enim aliud hoc vel illo excedere, & aliud toties (vel quaſi toties, id addo certa de cauſa poſthac inſinuanda) continere; hoc vel illo deficere, & toties ab alio comprehendi. Vulgò explicatur hoc diſcrimen haud male ex modo, quo inveſtigantur & innoteſcunt hæ relationes, tum ſaltem quum termini comparati numeris exprimuntur (exceptionem hanc oppono, quia video propter illum neglectum rationum doctrinam aut perperam aut obſcurè tradi) ſed ponamus terminos inter ſe collatos numeris exprimi; tum invenitur iſtorum Arithmetica ratio, ſubducendo terminum conſequentem ab antecedente; Geometrica verò dividendo terminum antecedentem per conſequentem (invenitur inquam, hoc eſt, indicatur, æſtimationi noſtræ ſubjicitur). E. g. comparando duo quanta numeris ternario & binario denominata, lineas puta tripedalem & bipedalem, ſubducendo binarium ex ternario relinquitur differentia unum, vel una pedalis linea. Sin tranſpoſitis terminis auferatur linea tripedalis ex bipedali remanet minus uno, vel defectus unius lineæ pedalis pro differentia; ex his verò reſiduis inclareſcunt relationes quoad differentiam, vel Arithmeticæ propoſitorum

ſitorum quantorum rationes; quatenus ſi inventum ab utravis ſubductione reſiduum addatur conſequenti, ſumma reſultans æquabitur antecedenti: nam in priori comparatione $1+2=3$, in poſteriori $-1+3=2$. (Huc verò tendere videtur omnis quantorum συγκρισις, ut ad æqualitatem, quæ præ reliquis maximè ſimplex, unicè permanens, facilliméque comprehenſibilis eſt relatio, redigantur aliæ, & utcunque per eam æſtimentur). Vocatur autem prior relatio ex priore differentia exceſsûs unius, altera defectûs unius, itidem ſcilicet ex differentia poſteriore. Jam verò ſi comparentur duo quanta, repræſentata numeris 20 & 4, dividendo antecedentem 20 per conſequentem 4, fit quotiens 5; ſed invertendo terminos, dividendóque 4 per 20, ſurgit quotiens $\frac{1}{5}=\frac{4}{20}$. Hiſce verò quotientibus declarantur rationes Geometricæ propoſitorum quantorum, quatenus ſi quotiens inventus per conſequentem multiplicetur, productus emergit æqualis antecedenti: nam in priori comparatione $5\times4=20$, in poſteriori verò $\frac{1}{5}\times20=4$; quomodo res iterum ad æqualitatem revocatur. Denominatur autem prior relatio à quotiente invento ratio quintupla, poſterior ἀνὶσεοφος ratio ſubquintupla, itidem à quotiente $\frac{1}{5}$. Aſt cauſa mihi jam reddenda videtur, quamobrem aliter quàm vulgò fit Arithmeticam rationem explicuerim, non ſubducendo minorem terminum à majore, ſed indifferenter conſequentem ex antecedente. Cauſam aſſignare licebit multiplicem: Primò, commodior eſt hic modus iſti, cui declarando inſiſtimus, diſcrimini rationum

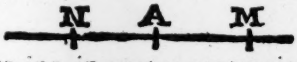
num harum diversarum per subductionem & divisionem declarando. Quia secundùm hunc modum subductio, qua indicatur ratio Arithmetica, per omnia respondet & quadrat divisioni, quâ ratio Geometrica declaratur. Nam juxta nos peragitur ibi hic duplex subductio, sicut hîc duplex divisio: subducitur ibi huc terminus major à minore (quæ impropriè est subductio) sicut hîc dividitur minor terminus à majore (quæ impropria est divisio). Emergit ibi huc residuum nihilo minus, sicut hîc quotiens unitate minor; illuc ex consequentis & relidui additione semper fit antecedens, planè sicut hîc ex consequentis & quotientis multiplicatione procreatur antecedens; ita pulchrè congruunt omnia: commodior igitur est hic modus altero, juxta quem fit tantùm una subductio, differentia tantùm est unimoda (semper intelligo positiva) seu major nihilo, nec reliqua quovis pacto bene consentiunt. Secundò, in se quoque verior est, & ipsissimæ rationi convenientior hic modus rationes Arithmeticas per subductionem explicandi. Quum enim comparando duo quanta inæqualia terminorum transpositio duplicem efficiat σχέσιν (non enim eodem modo refertur major terminus ad minorem, quo minor ad majorem) per unicam differentiam, minoris è majore subductione, acquisitam vel inventam, hæ duæ rationes non explicantur rectè & ex usu. Præstat eas duabus differentiis exprimere, alterâ positivâ excessum, alterâ negativâ defectum indicante. Non idem est dicere quod excedere, non igitur eodem signo denotandi sunt excessus

&

& defectus. Hoc quum non obſervarent aliqui, nullam dari quoad διαφορὰν quantorum σχέσιν aſſeruerunt; quoniam ſi daretur aliqua, duplex eſſe debuerit; at differentia poſitiva ſimplex eſt & unica. Nicomachus in Enchiridio Harmonices, Κακῶς γὰρ οἴονται διαφορὰν καὶ σχέσιν τὸ αὐτὸ εἶναι· ἰδοὺ γὰρ τὰ δύο πρὸς τὸ ἓν διαφορὰν μὲν ἔχει τὴν αὐτὴν, ἣν ἓν πρὸς δύο, σχέσιν δὲ οὐ τὴν αὐτὴν· *Malè opinantur qui differentiam & relationem pro eodem habent: ecce enim duo ad unum differentiam habent eandem, quam unum ad duo, ſed neutiquam eandem relationem.* Satis conſequenter arguit ex unicæ differentiæ hypotheſi; at enim reſpondeo quòd differentia inter 1 & 2 ſit —1, ſignificans 1 à 2 deficere uno; differentia vero inter 2 & 1 eſt +1, ſignificans 2 ſuperare 1 ipſo 1. Quum igitur duplex ſit differentia, nil obſtat quin ſint duæ relationes ſibi quaſi contrariæ vel univerſæ. (Malè igitur Theon ille Smyrnæus, Nicomacho conſentiens, Τῶν δὲ ἀνίσων διάστημα μὲν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ, ἐφ' ἑκατέρου ἑκάτερον· λόγος δὲ ἕτερος καὶ ἐναντίος ἑκατέρου πρὸς ἑκάτερον, & quæ ſequuntur in eandem ſententiam). Sane vix percipio cur non æquè confundi debeant rationes Geometricæ, quæ inter duos terminos inæquales, ex terminorum intercedant Metatheſi ſic ut pro una ratione habeantur, æquè ac vulgò commiſcentur, próque una cenſentur relationes ſecundùm διαφορὰν, quæ inter terminos itidem æquales verſantur. Nec obſtat quòd impropria ſit hujuſmodi ſubductio majoris à minore, quódque difficile videatur concipere quid ipſo nihilominus. Nam haud ferè minùs impropria cenſeatur

Cap. 30.

tur diviſio minoris per majus, neque faciliùs videatur concipere quoties majus à minore continetur. Satis eſt quòd hujuſmodi ſubductio, pari modo ac iſtiuſmodi diviſio, exactè calculo paret, ac legibus ſubjacet Arithmeticis, & non ſine ratione confingitur aut adhibetur. Adjici poſſet hunc ſubducendi modum, quoad alia valde utilem eſſe, præſertim in progreſſionum Geometricarum comparatione cum Arithmeticis; & imprimis illarum progreſſionum, quæ utrinque ab unitate procedunt hinc creſcendo, illinc decreſcendo; ſicut enim creſcentibus terminis exponentes aſſignantur poſitivi, ita decreſcentibus commodiſſimè tribuuntur negativi. Sed hoc non eſt jam perſuadendi locus. Moneo tantùm in Geometria facilè differentes haſce negativas, ſeu nihilo minores terminos exhiberi. Nam ab eodem fixo limite tantùm in partes ſtatuuntur & computantur contrarias iis, in quas procurrunt termini poſitivi nihilo majores. Ut ſi in linea recta indefinitè extenſa duæ rectæ AM, AN,



ſumptæ utrinq; in partes contrarias, ſingulæ æquentur cuilibet rectæ Z, & recta AM anterius excurrens repræſentet +Z, tum AN retrorſum accepta repræſentabit —Z. Ut puta nantem ab A verſus anteriora, ſed adverſo flumine brachiorum contentione progreſſurum ad M, ſed fluminis impetu duplo valentiore retrò deportari. Igitur ab eo confectum iter erit AM—2AM vel —AM, ab A verſus partes à tergo poſitas computanda, & pertingens ad N. At ſufficiant

hæc

hæc aliquatenus illuſtrando diſcrimini, quod inter rationes Arithmeticam & Geometricam intercedit, per ſubductionem & diviſionem. De eadem forſan re poſthac opportuniùs & accuratiùs diſſeremus, quum examinanda veniet eorum ſententia, qui rationum doctrinam numeris volunt alligari, & quæ iſti cohærent diſquiſitioni. Nunc unum ſolummodo vel alterum harum relationum diſcrimen attingemus, ex ipſorum natura petitum. Illud imprimis advertatur rationem Arithmeticam eandem unius tantùm generis terminis exhiberi, rationem verò Geometricam cujuſvis generis quantis bene repræſentari vel exprimi. Cauſa eſt, quia ratio Arithmetica determinatur per abſolutum quiddam intra certum genus conſtitutum, differentiam nempe quantorum duorum homogeneorum, quæ terminis ipſis ita comparatis ſemper homogenea exiſtit: ſed ratio Geometrica determinatur ex modo, quo res una continet aliam, vel continetur in alia, qui modus terminorum heterogeneorum conjugationibus variis æquè poteſt competere; unde fit ut quælibet duo quanta ſint apta nata quorumvis aliorum duorum quantorum ſimiliter affectorum relationes exprimere, vel menti æſtimandas ſubjicere. E. g. ratio Arithmetica duarum linearum inæqualium ſolis duabus lineis (non duobus ponderibus, temporibus, corporibus) exhiberi poteſt, quia nulla linea pondere quovis aut tempore, vel corpore lineam alteram excedit, at aliqua lineâ tantùm, eâque ſecundùm abſolutam ſuam quantitatem definitâ; ſed ratio Geometrica duarum earundem linearum expri-

mi

mi poteſt duobus ponderibus, duobus temporibus, aut aliis cujuſvis generis duobus quantis: ut nempe quæ pedem inter & unciam longitudinalem verſatur, ratio repræſentetur libra & unciâ ponderibus, anno & menſe temporibus, aut aliis quibuſvis ſimilibus terminis, quorum unus alterum continet duodecies; quia ſcilicet harum conjugationum utut ſecundùm abſolutas ſuas quantitates invicem heterogenearum termini inter ſe collati eodem ſe modo reſpiciunt, versùs ſe conſimiliter affecti ſunt. Exhinc anſam cepit doctiſſimus vir dicendi, *Rationes omnes Geometricas quarumcunque ad invicem quantitarum eſſe inter ſe homogeneas, quippe in genere numeroſo omnes.* Adjungítque poſtea, *Ubi comparatio ſit quoad rationem, quæ emergit ratio comparatorum, genus non raro deſerit, & tranſit in genus numeroſum, cujuſcunque ſint generis quæ comparantur.* Quæ tamen dicta minùs probo, cùm aliis de cauſis non jam exponendis, tum quia nullum ego vel rationum vel numerorum genus, ſub quantitate comprehenſum agnosco; nec enim rationes ſunt meâ ſententiâ quantitates, nec quantitatis capaces (ut ſuo poſthac loco conabor evincere) ſed meræ relationes in quantitate fundatæ; numeros autem pro nominibus tantùm & ſymbolis habeo rerum quantarum, quod jam antea ſæpiùs expoſui & aſtruxi. Addo manifeſtum videri, quod cùm duo quanta comparantur inter ſe (ut ſcilicet ipſorum ratio per artificioſas quaſlibet operationes Arithmeticas vel Geometricas inveſtigetur, hoc eſt, menti noſtræ comprehenſibilis & æſtimabilis reddatur) non tamen inde nova procuditur

D. Wallis Arithm. p. 226.

ditur aut emergit ratio, quàm eadem aliis terminis exhibetur; nec unquam ratio genus ſuum deſerit, ſed diverſi generis terminis, ſimplicioribus ut plurimùm & menti notioribus exhibetur; plerumque quidem (cùm id fieri poteſt) numeris, ideo quia hi ſymbola ſunt rerum menſuris ad noſtrum captum determinandis accomodatiſſima. Percontanti v.g. quam rationem in valore vel in pondere habet ſolidus ad drachmam, qui reſpondet, rationem habet numeri 12 ad 4, non aliam producit rationem, at quæſitam exponit terminis numericis; & qui porro quærit quæ ſit ratio numeri 12 ad 4, dividendóque antecedentem 12 per conſequentem 4, comperit hanc eſſe triplam, non is novam rationem educit aut enunciat, at propoſitam exprimit terminis faciliùs æſtimandis, hoc eſt, numeris, iiſque tandem minimis ternario ac unitate. Qui dicit enim illud hujus triplum eſſe, dicit æquipollenter, & illud vult intelligi illud ad hoc ſe habere ſicut 3 ad 1; antecedente ſcilicet expreſſo, ſed conſequente (qui ſemper in hujuſmodi rationum denominationibus eſt unitas) verbo tenus ſuppreſſo, re ſubintellecto. Hinc altera diverſitas harum rationum adnotari poteſt, quòd Geometrica ſemper duobus terminis, ſaltem quoad intellectum, exprimitur, iiſque ſemper poſitivis (nam etiam duorum negantium terminorum ratio poſitiva eſt, puta $\pi\delta$ —4 ad —2 eſt dupla, vel ut 2 ad 1, quod inde patet, quia multiplicando terminum utrumque per —1, producitur +4 & +2, habentes ſe ut 2 ad 1). Sed Arithmetica ratio tantùm uno termino exprimitur, eóque

nonnunquam negativo: ut talis ratio inter 1 & 3, commodissime indicatur per negativum terminum —2, ut supra mox admonitum. Accedit quod Arithmetica ratio reperitur inter duos terminos diversis signis affectos; at inter tales nulla versatur ratio Geometrica. E.g. ratio Arithmetica inter 2 & —2 est eadem rationi quæ inter 6 & 2; nam utrobique excessus antecedentis supra consequentem est 4, at 2 ad —2 nullam Geometricam obtinet rationem; habet enim se ad illud, sicut aliquid ad plusquam infinite parvum, nec ullus est cogitabilis numerus, utcunque magnus, qui non sit minor respectu unius, quàm 2 respectu —2. Porro, æqualium ratio Geometrica semper denominatur unitate, ratio Arithmetica nihilo; majoris ad minus ratio Geometrica, numeris explicabilis, denominatur unitatem excedente numero, integro vel misto. Pariter & ratio Arithmetica nihilum excedente differentià, (quæ tamen unitatem non semper attingit) minoris autem ad majus ratio Geometrica semper fractione vel numero, qui sit unitate minor denominatur, at ratio Arithmetica talium terminorum signatur infra nihilum subsidente numero negationem involvente, ut antehac inculcavimus. At verò de harum rationum discrepantiis diximus plusquam satìs. Cùm igitur adeò naturâ diversæ sint hæ relationes, idem rationis nomen utrique non conveniet univocè quod aiunt; adeóque præstat id vocabuli Geometricæ soli appropriatum relinquere. Nósq; dimissâ jam ista ἀκύρως dictâ [illegible] propiùs ex[illegible]dam hujusce Geometricæ rationis notionem accedamus. Aperuisse

ruisse viam ancipitiis præpeditam sufficerit τὰ νῦν. Ei proxima Lectione pressiùs insistemus; interim (auditores optimi) precor valeatis.

LECT. III.

PRæfationibus utcunque defuncti, discussisque quæ se objecerant ambiguitatum nebulis, ipsam Geometricæ rationis naturam jam aggredimur inquirendam & enodandam. Geometrica verò ratio, vel ratio simpliciter (hoc enim sensu deinceps perpetuo hoc vocabulum usurpavimus, ut & ei æquipollens proportio) ratio, inquam, vel proportio, ὁ λόγος definitur ab Euclide (vel ab Eudoxo si quidem is fuerit, ut perhibetur, elementi V compositor) Δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Circa quam definitionem duo quæri possunt & disceptari; primò quæ sit ejus genuina mens, tum an ipsa satis proba sit & accurata. Utrique disquisitioni satisfacere conabor, ad singulos ejus terminos quædam annotando, quò magistri nostri simul interpretatur sensus, & tueamur auctoritatem. (Ignoscite verò pugnacitati meæ, neque sequiùs accipite, quòd pietate quadam adductus immeritis undique criminationibus impetitum Geometriæ patrem & principem studeam vindicare). In omni imprimis definitione I. spectandum est, ut res definita ad certam entium classem restringatur; id enim ad

ejus naturam determinandam, & ab aliis ſecernendam, apprimè confert. Ergò primò genus inquiritur: hoc in hac definitione eſt χέσις, habitudo vel relatio; rectè quidem, nam quum omne quantum dupliciter conſiderari poſſit, vel ut certam quandam abſolutam ſui generis extenſionem (abſolutam, inquam, & ex intrinſeca naturæ ſuæ proprietate determinatam) habens, vel quatenus cum alio quanto collata certo versùs ipſum modo ſe habet; cujus modi comprehenſio menti noſtræ deſerviat, ad quantitatem ejus abſolutam meliùs concipiendam, & aliis enunciandam; certo modo, dixi, ſe habet, hoc eſt, ut vel ei penitus congruat & æquetur, vel inæquale ſit ratione quadam peculiari, quæ per numeros (hoc eſt, ſymbola quantorum in æquales partes diviſorum connotantia) vel per aliorum quantorum eodem modo ſe habentium expoſitionem, nobis utcunque nota reddatur & æſtimabilis. (Ignoſcite quæſo vos rem explicatu perdifficilem, & ſubtilitate ſua mentis attentiſſimæ cogitationi illudentem, craſſiuſculè laboranti illuſtrare) hoc autem certo modo ſe habere versùs aliud, alteri ſic æquari, vel certa ratione quadam inæquale eſſe dicitur (ex inſtituto dicitur, conſensúque magiſtrorum rebus in hac ſcientia conſideratis nomina præſcribentium) hanc vel illam ad alterum rationem habere; & reſpectus ipſe talis abſtractè ſumptus ratio nuncupatur, quæ proinde meritò relationum claſſi ſeu categoriæ accenſetur: liquet enim ipſa quanta hoc pacto conſiderata ſere τὰ πρός τι referri ad ſe mutuò, cuncta ſubire, quæ relatis & correla-

tis

tis aſſignant Logici; unde prima τῆ πρός τι deſumpſit hinc exempla Philoſophus, cùm in Metaphyſicis tum in Logicis: Οἷον (inquit) τὸ μεῖζον τοῦθ' ὅπερ ἐστὶν ἑτέρου λέγεται· πρὸς γὰρ μεῖζον λέγεται· καὶ τὸ διπλάσιον τοῦθ' ὅπερ ἐστὶν ἑτέρου λέγεται· πρὸς γὰρ διπλάσιον. Nihilominus tamen hoc nomine mirificus iſte Matheſeôs hodiernæ caſtigator noſtras, Euclidem ſugillat inclementiſſimè & irreverentiſſimè. *Rationis*, inquit *definitio* (hanc innuens Euclideam) *ſatis inepta.* Iterum, *Id quod Euclides inſignificanter dixerat.* Adhuc, *Fieri poteſt ut Euclides non ſatis ipſe perſpexerit rationis naturam; imò fieri aliter non poteſt, cùm definierit rationem per* ποιὰ χέσις. Denuò cenſet Euclidem hoc loco tuſſiiſſe, hoc eſt, cùm nihil haberet quod ad rem diceret, ſonum mentis vacuum edidiſſe. Sed bona verba; quæ cauſa tam tragicè ſæviendi? quia ſcilicet ὁ στοιχειώτης rationem per χέσιν definivit; χέσις autem quod tu capere potes, aut vis nihil ſignificat: quid facias hoc hominè? ipſe rationem, teſte ſeipſo ac judice, verè ſicut omnia & accuratè definit, hoc modo, *Ratio eſt relatio antecedentis ad conſequens ſecundùm magnitudinem.* Ratio eſt relatio, quid aliud cogitavit aut voluit Euclides? quis ejus unquam mentem aliter cepit? Sed pro jure ſuo vult hic ordinis Dictatorii vir non tantùm ipſe loqui, ſed alios loquentes intelligere ſuum ad modum & arbitrium; adſumit ſibi (quis enim prohibeat?) vocabulorum peritiſſimus faber, animi ſui ſenſum præter morem efferre, ſed nec eo contentus adrogat ſibi poteſtatem, alienas quoque ſententias contra commune ſuffragium & receptiſſi-

Pag. 44, 100, 88, 82.

Pag. 45.

mum usum interpretandi. Σχέσις, quando sic ipse jubet & statuit, habitudinem significare debet; habitudo verò nihil, quicquid alii plerique reclament mortales, ista vocabula certos ad sensus suos designandos adhibentes. Grammatici congruentiam istam seu connexionem inter substantivum & adjectivum, nomina intercedentem σχέσιν ὀνομάτων vocant. Theologi disputant an imagines sint adorandæ σχετικῶς, hoc est, propter σχέσιν seu relationem quam obtinent ad prototypa quæ repræsentant. Illas quæ cognatos & affines versantur relationes, ex naturæ conjunctione vel mutuis pactionibus oriundas, communis sermo σχέσεων designat appellamento. Plaustra liceret exemplorum invehere; sufficiat probatissimi unius Grammatici luculentum testimonium: Ἡ σχέσις (inquit Suidas) ἐπὶ τῶν πρός τι λέγεται, οἷον πρὸς πατέρα υἱὸς, πρὸς φίλον φίλος· ταῦτα γὰρ καὶ ἔχει καὶ ἔχεται ἀπ' ἀλλήλων, διὸ καὶ σχέσεις προσείρηται· πρὸς δέ τι εἰσὶν καὶ τὰ κατὰ σύγκρισιν λεγόμενα, οἷον μικρὸν, μεῖζον, διπλάσιον, καὶ ἐπιστήμη, καὶ αἴσθησις. Non igitur vocabulum σχέσις prorsus insignificans & sensûs expers est. at certè quiddam aptè satis notat, nec aliud planè quam ipsam relationem. *Sed*
Pag. 45. *quæro* (inquit adversarius) *quid est quod hoc loco habet, quid quod habetur? Et an ratio dicatur habitudo, ab eo quòd ipsa habet aliquid, vel ab eo quod habetur? Et siquidem habet quid sit quod habet, sin habeatur a quo habetur. Quæ omnia sunt inepta.* Ad quæ regero, quum ab ipso ratio dicitur relatio, scilcitor & ego quòd sit isthic quod fertur aut refertur, unde vel quò fertur; qui motus isthic inter terminos duos com-

comparatos reciprocatur. Scilicet revera non vacat ineptiâ vocabulorum vires & significatus ſtrictâ ſeveràque lege ſolis ex etymis colligere vel adſtruere, qui potiùs ab utentium conſuetudine conſensúque, cui ſuam unicè ſignificandi vim ac potestatem debent, accipiendi ſunt & approbandi. Quanquam cùm τὸ ἔχειν innumeris modis uſurpetur, nihil uſitatius ſit Philoſophis, quàm eo relationem & reſpectum τὸ πρός τι denotare. Ariſtoteles in Categoriis, Ἔστι δὲ τὰ εἴδη τοῖς πρός τι ταυτὸν τὸ πρός τι πῶς ἔχειν. Relationum eſſentia conſiſtit in hoc, quòd ad aliquid ſe certo modo habeant, vel quodammodo ſint affecta. Illud autem habere fundamentum innuit verum & reale quod habetur & reperitur in terminis ſinguiæ cujuſque relationis, propter quod vel ſecundùm quod ſe mutuò reſpiciunt. Habetur v.g. (quò pleniùs reſpondeatur adverſario) determinata quantitas in terminis cujuſcunque proportionis, propter aut juxta quam una comparatur cum alia; unde forma loquendi frequentata Geometris, nec ab ipſo non animadverſa, quæ rationum ſimilitudines explicantur per ὡς ἔχει, ὅπως ἔχει· Ut ſe habet A ad B, ita ſe habet C ad D. Non igitur delirat Euclides (is cui tot ſeculorum communi voce toties acclamatum eſt, nuſquam erravit) ſed ejus cenſor inſolenter cavillatur; non is inſignificanter ſcribit, aſt hic oſcitanter legit; non ille rationis naturam minùs perſpexit, at hic rationem explicantis verba pervertit; non denique tuſſit Euclides, ſed ὁ δεῖνα inverecunde crepat: omnino ſanè dignus, cui talionem quis remetiatur, & illud increpet

Euripideum, ——Ἐπεὶ τὰ μὴ καλὰ
Λέγειν ἐτόλμας, πλὴν δὲ κ τὰ μὴ φίλα.
Sed illum ſoleo nimium morari; (unum obiter adnotabo, quod Nicomachus Geraſenus
2. in Muſicis, qua ratione vel authoritate fretus neſcio, ordine permutato σχέσιν habet pro
Nicom. Muſ. l. 1. p. 24. ſpecie, λόγον pro genere; Σχέσις, inquit, λόγ☉ (ἐστὶν) ἐν ἑκάστῳ διαστήματι μεταξὺ ικὸς τ ἀποστάσεως. Poſt genus in accidentium definitionibus ſubjecta proximè ſpectari debent, in relationibus qui dicuntur termini.
2. Hinc adverto proxime τ στοιχειωδῶ, cùm Geometricæ materiæ dicaret hoc elementum magnitudinem ſolummodo rationum definiendam ſuſcepiſſe. Hinc habetur μεσεθῶν, pro quo ſiquidem ratio generaliſſimè definienda eſſet, ſubſtitui deberet τ ποσῶν aut τ ὅρων: ſicut apud Theonem Smyrnæum,
Cap. 19 Λόγ☉ δέ ἐστιν ὁ καθ' ἀνάλογον δυοῖν ὅρων ὁμογενῶν ἡ πρὸς ἀλλήλας ποιὰ σχέσις· & Ni-
Lib. 2. p. 62 comachum in Arithmeticis, Λόγ☉ ἐστὶ δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλας σχέσις. Reprehendit autem auctorem noſtrum Ramus hac de cauſa, quòd magnitudinum rationem ſeorſim definierit, quum ratio convenit omnibus rebus:
Schol. 13. *Elenchus* (inquit) *toto libro perpetuus eſt Logicæ & Arithmeticæ, ad poſteriorem materiam de magnitudinibus alligatæ.* Reſpondeo primùm, ſaltem ab hoc ipſo cenſore majorem committi elenchum, qui rationem numeris alligat, materiæ æquè ſpeciali & minus aptæ:
Arith. 2. 2. *Altera* (inquit) *quantitatis comparatio eſt è numeratione conjuncta, & dicitur ratio, quæ ſpectatur quotiens conſequens in antecedente continetur.* Quaſi verò quantitatis omnimoda comparatio numerationi ſubderetur, numeris con-

conveniret omnis ratio, vel numeris exprimi posset. Satis constat, nec ipse diffitetur, rationes quasdam dari ἀλόγους & ἀῤῥήτους, surdas & numeris inexplicabiles; at nulla datur in universum ratio, quæ in cujusvis generis magnitudinibus nequit exhiberi. Numerus igitur ineptiùs adsumitur pro rationis adæquato subjecto; magnitudo multùm aptior est, utpote cui nullus rationis modus, nulla species non convenit. Secundò respondeo, cùm (ut jam olim abundè mihi videor comprobâsse) magnitudo sit præcipuum & solum propriè dictum genus quantitatis, & reliqua non nisi κατὰ σχέσιν, κατὰ μετοχὴν, κατ' ἀναλογίαν, adeóque non nisi secundariò quantorum attributa sibi vindicent, cúmque nos id bene doceat Philosophus, id rationem exigere talium, τῶν πρὸς ἕν vel analogorum, ut quæ primaria sunt eorum respectu communia symptomata seorsim, & imprimis definiantur (Ἀποδοτέρον πρὸς τὸ πρῶτον ἐν ἑκάστῃ κατηγορίᾳ πῶς πρὸς ἐκεῖνο λέγεται· &, Ὁ πρώτως καὶ ἁπλῶς ὁρισμὸς τῶν ἄλλων ὁμοίως ἐστὶ, πλὴν οὗ πρώτως) hinc meritò magnitudinum ratio primùm definitur & separatim, eíque primariò conveniens definitio nil obstat, quin ad aliorum quantorum rationes analogicè transferatur. Et sanè quicquid magnitudinum rationibus verè tribuitur, & de iis demonstratur, id quantorum omnium rationibus exactè congruit; quatenus omnia quanta prout ipsam suam absolutam quantitatem, ita respectivam quoque consequenter à magnitudine dependentem & determinandam habent. Respondeo tertiò, elementi V conditorem, cùm (sicut

Met. III. 2. VII. 4.

(ſicut paulo jam ante inſinuatum) magnitudinum rationes rebus Geometricis illigatas, ſibimet unicè proponeret excutiendas, ideo ſatis habuiſſe ſi duntaxat ipſarum naturam apertè profiteretur exponere. Scientiarum omnium particularium Magiſtris hoc in uſu poſitum eſt: Grammatici modos & tempora deſcribunt tantùm, ut verborum flectionibus adſignificata: Rhetorici tropos & ſchemata, non ut rebus omnibus, ſed ut dictionibus & ſententiis convenientia: Ethicus virtutes definit, non ut ipſis comprehendantur, quas Plato toties prædicat, equorum canúmque virtutes, ſed humanas tantùm, & τὰς μὴ λόγῳ πολιτικὰς· Muſici rationes & diaſtemata non omnium explicant quantorum, ſed τῶν φθόγγων, hoc eſt, ſonorum ἐμμελῶν· nè plura diſciplinæ quæque particulares hoc ſibi juris adſumere ſolent, ut vocabulorum quibus expedit uti, laxiores alioquin ſignificatus ad ſuam ſpecialem deducant, ad ſubſtratam ſibi τύπον adaptant aſtringántque terminos ſuos, quatenus uſurpant, eatenus definiunt aut deſcribunt, cùm aliis de cauſis, tum perſpicuitati præſertim ſtudentes, ſed & aliquatenus conſulentes brevitati; eo ſcilicet vitantes, nè aut generalem quandam à ſuo propoſito maxima ex parte ſejunctam doctrinam aliundè cogantur repetere, vel dicendorum intelligentiæ conducentem explicationem omittere. Quòd ſi Logicæ Ramææ legibus minùs ad amuſſim congruat hoc, non ideo rationis ipſius adverſatur decretis, aut culpæ obnoxium eſt; nam ex illis vel aliis quibuſcunque Logicis præſcriptis agere ſummo jure, ſumma ver-

versùs authores bonos, & ipsas versùs artes injuria fit. Quin aliud est totam Philosophiam in unum corpus compingere, aliud particulares scientias tradere; istic ordo rerum, & concinna brevitas, hîc dictorum claritas, facilitas, firmitas potissimùm attenduntur; ubivis interest doctrinam addiscentis captum accommodari. Sed nimis excurro. Porro, responderi posset cum nonnullis, quòd τὸ μέγεθος sic accipi possit, ut omne quantum designet, per istius vocabuli levem quandam & satìs vulgarem καταχρησιν. Nam si numerus sæpe magnus dicitur, & pondus magnum, & magnum tempus, quidni res istæ quatenus quantæ dicantur aliquo modo μεγέθη; & sic elementaris definitio directè satis ad omnia quanta pertendatur? Verùm Euclidis contra Ramæanam oppugnationem defensioni satìs datum: pergo. Annoto tertiò, cùm magnitudines etiam heterogeneæ possint aliquo modo secundùm aliquid inter se comparari, vel se mutuò respicere; linea nimirum superficiem respiciat, & superficies corpus, quatenus superficies ad lineam παραβάλλειν (vocabulum est Euclideum) applicari potest velut ad latus ipsius, & corpus ad superficiem tanquam ad basin cui insistat; útque sit linea superficiei perimeter, & superficies corpus ambitu suo claudat; potest & linea quoad unam dimensionem superficiei, superficies quoad duas corpori coëxtendi, ac eatenus ista cum his comparari: neque non quoad communes alias affectiones, inter istiusmodi quanta genere diversa, compluribus modis institui possit comparatio qualiscunque; à quibus tamen 3.

col-

collationibus emergentes reſpectus admodum diſcrepant ab hoc, juxta quem homogeneæ magnitudines ad ſe referuntur, modo quem hîc intelligit, definitur; eapropter ad excludendos illos, quæcunque magnitudines inter heterogeneas verſari poſſunt relationes, aſſignat proprios relationis à ſe deſignatæ terminos, adæquata rationis συνημμένα, limitibus ſuis circumſcripta per adjectum ὁμογενῶν. Sola ſcilicet homogenea quanta rationem habere dicuntur, quia ſolæ ſunt æqualitatis & inæqualitatis capacia, ſola mutuum exceſſum atque defectum admittunt, & his adjuncta ſymptomata Geometricis ſpeculationibus ſubſtrata: ſed de hac re jam antè ſatis ubertim eſt diſſertatum. Neque magnopere Ramum morabor hîc ſanè nulla cum rationis ſpecie nos vellicantem:

Schol. 13. *Imò verò* (inquit) *ratio iſta quam ſibi definiendam proponit Euclides æqualitatis & inæqualitatis, communis eſt omnium rerum, lineáque ſuperficiei corporíque comparari poteſt. Sic lib.* 14. *Elementorum comparantur corpora, ſuperficies lineæ inter ſe; & ſic lunula Hippocratis quadratur, & anguli obliquilinei rectilineis æquantur.* At verò præter hunc cenſorem (anſas ut videatur arripientem omnes, & undicunque cauſas aucupantem laceſſendi veteres illos ſcientiarum Magiſtros, quos tamen æquum eſſet non abſque graviſſima cauſa reprehendere, ſicubíque manifeſtè ceſpitaverint, mitiùs cum iis agere deceret nos, tantorum inventorum illis debitores; præter hunc, inquam, quis iſtiuſmodi comparationes linearum cum ſuperficiebus & corporibus, quales in 14 tractantur elemento, ad rationum naturam

turam cogitavit pertinere? Cùm pentagoni vel decagoni, pyramidis aut octaedri regularium latera qualiter affecta ſint inter ſe, verergaradium circuli aut ſphæræ, quibus inſcribi poſſunt iſtæ figuræ, inveſtigatur; quis unquam cenſuit iſtas rectas lineas, ſeu latera figurarum, cum ipſis figuris ſuis quoad rationem comparari? neminem exiſtimo eò imperitiæ acceſſiſſe. Id tamen vult Ramus aut nihil, ad rem certè nil aliud quantum aſſequor intelligere poteſt. Quis etiam unquam, illo ſuppoſito, lunulam Hippocratis, figuram nempe planam terminatam quadrato, vel alteri cuivis figuræ planæ cenſuit heterogeneam? Quidni pari jure protuliſſet exemplum magis obvium ſphæram cum cono vel cylindro comparantem, hoc eſt, corpus unicâ rotundâ ſuperficie comprehenſam cum corpore mixtâ ſuperficie concluſo? Nempe quid ſit homogeneum & heterogeneum, ſaltem quid per iſta vocabula perpetuò ſignificant Geometræ, noluit intelligere, noluit ὁμογένειαν & ἑτερογένειαν ab ὁμοειδείᾳ & ἑτεροειδείᾳ, diſtinguere. Sed abhinc tranſeo, & adnoto quartò, 4.
quòd cùm etiam homogeneæ magnitudines, quoad ipſis accidentia multa, comparari queant (quoad ſpeciales puta nonnullas proprietates ſuas, quoad ſitum, quoad localem diſtantiam, quoad ipſarum diverſimodas qualitates; addo cum vetere Scholiaſta, quoad valorem ſeu pretium, καθ' ἀξίαν (ἀπὸς γδ, ait, ὁ λόγ☉ ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ ὁ δ' ἐν ποσῷ) ut e. g. duæ lineæ ſecundum rectitudinem aut curvitatem ſimiliter aut diſſimiliter ſe habere poſſunt; una præſtò ſit, altera viginti

ti ſtadiis abhinc ſemota; una ſit alba, altera nigra; cùm tamen hujuſmodi relationum nulla ſignificetur hîc, iis ſecludendis adjungitur κατὰ πηλικότητα, fundamentum ſcilicet indigitans hujuſce relationis. Ad relationum quippe naturam explicandam poſt genus expreſſum, & terminos ritè conſtitutos, fundamentum proximè ſubjiciendum eſt, formalem ejus rationem ultimè complens, & differentiæ, quam Logici vocant eſſentialis vice defungens. Κατὰ πηλικότητα, quoad quantitatem, hoc eſt, quoad magnitudinis ſuæ determinationem, vel magnitudinem ipſam determinatam; ſaltem ſecundum quòd quæritur quantæ ſunt, & reſpondetur tantæ. Nam μέγεθος πηλίκον, cui relative opponitur πενστικὸν hoc πηλίκον, nil videtur aliud denotare quàm magnitudinem ipſam, quatenus per ſuam (ut ita loquar) ſingularitatem determinatur in ſe, & ab aliis quantis diſtinguitur. Cauſa verò propter quam aliqua magnitudo, vel potiùs aliquod magnum (plerumque enim confunduntur nomina concreta & abſtracta) tali modo refertur ad aliud magnum non alia concipi poteſt, quàm ideo quòd abſolutè tantam in ſe magnitudinem habet; ſicut univerſim omnis relatio fundatur in aliquo abſoluto. Unde non admodum probo, quòd κατὰ πηλικότητα nonnulli exponunt, ſecundùm quod unum alterius tantuplum eſt, vel ſecundùm tantuplicitatem (ejuſmodi nempe vocabula nihil verentur confingere δυσκατάληπτον neſcio quid ſignificantia). Præterquam enim v.c. quòd non bene ſonet hujuſmodi definitio duplæ rationis, relatio duorum quantorum ſecundùm duplicitatem

tatem, videtur tantuplicitas intrinsecè continere vel connotare relationem quandam; at verò relationum fundamenta non sunt relationes, nec relationum implicant, sed res absolutæ sunt, propter aut secundùm quas relationum termini ad se referuntur. Malè diceretur, opinor, hoc ei simile est, quia similiter affectum; at bene, quia calidum est vel album; seu propter calorem & albedinem qualitates absolutas: sic & æquale dicitur hoc illi, propter vel secundùm utriusque magnitudinem absolutam, & propter eandem hoc illius tantuplum aut totuplum. Nec eadem de causa mihi perplacet illa Clavii interpretatio, *Secundùm quantitatem, hoc est, secundùm quòd una major est quàm altera, vel minor, vel æqualis.* Non æqualitas, majoritas, minoritas, sunt vocabula quoque relativa, nec idonea proinde relationi fundandæ. Quinimò cùm ratio definitur, ipsæ aliquatenus & virtualiter æqualitas, majoritas, & minoritas, utpote sub ratione seu genere suo comprehensæ, definiuntur. Unde malè collocari videntur in ipsius rationis definitione. Non improbo tamen, & dignam existimo quæ memoretur observationem Græci Scholiastæ, qui χ^τ πλικότητα potiùs quàm χ^τ ποσότητα consultò positum autumat, quia non omnes rationes numero exprimi possunt, nec omne quantum alterius ullo comprehensibili modo totuplum est: Ἐπεὶ μὲν (ait) τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὸν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν ἐστί τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ, διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν τὸ χ^τ πλικότητα· ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς καὶ χ^τ πλικότητα καὶ χ^τ πο-

ποσότητα ἐστὶν, οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα καὶ ῥητὸς· hoc est, Noluit Euclides quantorum rationem fundari ἐν τῇ ποσότητι (in ipsorum quotitate vel quotuplicitate) quia non omne quantum alterius est ποσὸν, toties ipsum continet, aut continetur in ipso, vel perfectè vel imperfectè, secundùm se, vel secundùm quaspiam ipsius partes aliquotas; sed κατὰ πηλικότητα, quia saltem omne quantum determinatum in se quantitatem habet, juxta quam cum altero & ipso determinatè quanto comparari potest. Sed objectatur huic definitioni sic expositæ, quod æquè conveniat isti quantorum relationi, quæ differentiam innuit ipsorum τῇ κατὰ τὸ ὑπερέχειν καὶ ἐλλείπειν σχέσει· Nam & illa verè dicitur relatio quædam duorum quantorum ejusdem generis κατὰ πηλικότητα. Respondeo primùm, cùm κατὰ πηλικότητα dicitur hîc, subintelligi αὐτῶν, secundùm ipsorum terminorum quantitatem. At relatio differentiam innuens non videtur in ipsorum comparatorum quantitate fundari, sed in quantitate tertii cujusdam, excessûs scilicet, seu quanti absoluti, quo antecedens exsuperat consequentem, vel ab eo deficit. Ejusmodi nempe relatio quæ versatur inter 10 & 8, fundari videtur in binarii quantitate, non in ipsorum 10 & 8 numerorum quantitate. Nam relationem istam satis indicat, exprimítque solitarius iste terminus, exhibitus nempe numerus binarius; at Geometrica ratio non nisi duobus terminis, explicitè potiùs, aut mente saltem intellectis, exprimi potest. Agnoscit hoc doctissimus vir in sua contra Meibomium Diatriba; *Differentiam illam dicimus* (inquit) *non*

Pag. 41.

qui-

quidem Arithmeticam rationem esse, propriè loquendo, aut etiam ipsius rationis essentiam, sed fundamentum istius relationis, quæ dicitur ratio Arithmetica. Quo dicto solvit suam ipsius exceptionem contra definitionem Euclideam nostro modo expositam. Hoc etiam observâsse videtur Aristides Quintilianus, quum Geometricas & Arithmeticas quantorum σκέψεις ita distinguit; Διττοῦ ὄντος τοῦ ποσοῦ, τοῦ μὲν συνεχοῦς ἐπιστάτης οὖσα γεωμετρία, κατὰ μέγεθος ποιοῦσα τοὺς λόγους ὅλα μέρεσι τῶν αὐτῶν συγκρίνουσα· τὸ δὲ διαστηματικὸν ἀριθμητικὴ γνωματεύουσα, μερίζουσα τὸ ὅλον, τὰς τῶν μερῶν πρὸς ἄλληλα ποιεῖται συγκρίσεις. Quæ verba satis obscura sic accipio, Ratio Geometrica comparat inæqualia duo quanta, hoc est, totum & partem, secundùm suas ipsorum quantitates; at ratio Arithmetica quantorum inæqualium differentias spectans consequentem terminum, & excessum considerat ut partes antecedentis. Sed respondeo secundò, forsan Euclides, cum veterum aliis antea citatis, istam Arithmeticam quantorum σχέσιν non agnoverit, saltem à Geometris nullam habendam ejus rationem censuerit; satísque proinde visum ei fuerit, si definitio sua congrueret omnibus & solis istis quantorum συγκρίσεσι, quas secundùm quantitatem instituunt Geometræ. Nam quantorum dimensionibus & aliis, quoad speciem & situm determinantibus, qui Geometræ scopi præcipui sunt aut soli, sufficere videtur istius relationis consideratio. Nec aliam ferè vulgus ipsum quantorum concipit relationem: etenim cùm vulgò quærunt homines quantum est hoc vel illud, nihil inqui-

runt aliud, quàm quoties id continet ſtatam aliquam & familiariter ſibi cognitam menſuram, vel quoties in illa continetur, hoc eſt, ejus ad hanc menſuram exquirunt rationem Geometricam. Ad 10 tertiò, quòd relatio ſecundùm differentiam, cùm exprimitur numero comparatorum terminorum aliquem denominante, vix reipsà differat à ratione Geometrica. Ut cùm dico B excedit A per 3A, idem eſt ac ſi dicerem B eſt quadruplum τῶ A, vel ad A referri ſicut 4 ad 1. Aut ſi dicerem B excedere A unà tertiâ ipſius *B*, perinde eſt ac ſi dicerem, & hinc facilè conſectatur, B eſſe ſeſquitertium ipſius A, vel habere ſe ad A ut 3 ad 2. Ac huc fortè reſpexerint qui rationem conſiſtere dixe- *Hobb. de Corp. c.* 11. rùnt in quantorum differentia comparata cum utrovis quanto; qui tamen loquendi 11. § 3, 5. 12. § 8. modus admodum in ſe difficilis eſt & obſcu- 13. § 1. rus, erroremque ferax graviſſimorum, ut videre eſt ex iis quæ contra Hobbium & Meiboium diſputat eximius vir; quorum igitur rationes explicandi modum nec probo nec defendo. At ſaltem dico relationem quantorum quoad differentiam, ſiquando pro determinandis quantorum menſuris conſiderantur à Geometris, eam ut ab illis adhibetur plerumque cum Geometrica ratione tantundem innuere. Quapropter eam neglexerit Euclides ut vel parum utilem, vel ut minimè diverſam à ratione Geometrica.

5. Sed progredior advertendo quintò, voces in definitione poſitas πρὸς ἄλληλα communiter exponi mutuò vel ad ſe invicem, quo ſignificari videtur reciprocatio quædam, & alterna relationis hujuſce permutatio, terminis ita

tranſ-

transpositis, ut nunc sit antecedens, qui modò consequens fuerat; quæ quidem interpretatio mihi non arridet, utpote quandam ipsi definitioni absurditatem impingens. Enimverò si terminis transpositis alternetur aut invertatur comparatio, exsurgunt duæ relationes admodum inter se diversæ. Ut v. g. lineæ tripedalis ad pedalem relatio est relatio tripli ad unum, vel ratio tripla; sed inversè relatio lineæ pedalis ad tripedalem est relatio unius ad triplum, vel subtripla ratio, quas rationes denominantium numerorum unus alterius noncuplus est. ($\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times 3$). Igitur πρὸς ἄλληλα potius interpretor unius ad aliam, vel alterutrius ad aliam. Voluit enim proculdubio, certissimè debuit, unam simplicem unius magnitudinis ad aliam, non duas simul rationes sibimet inversas definire. Quia verò nihil intererat utra magnitudo præcedentis, in hac comparatione, vel consequentis locum occuparet (quandoquidem indiscretè quævis magnitudo ad quamvis alteram homogeneam rationem obtinet aliquam) ideo posuit πρὸς ἄλληλα, quo significatur ἀδιαφορία quædam, quoad situm & ordinem terminorum. Si nempe comparentur inter se duæ quælibet magnitudines homogeneæ quoad quantitatem, quæcunque ponatur antecedens, ejus ad alteram relatio dicitur ratio. Neque respuit hanc interpretationem vocabulum ἄλληλον, vel ad rigorem primævæ notionis exactum, sed potiùs favet & juvat. Nam ἄλληλον ex origine denotare videtur ἄλλο ἢ ἄλλο, aliud vel aliud disjunctivè; non ἄλλο καὶ ἄλλο conjunctim. Sed nolo diutiùs hîc χρηματίζειν. Unicum

6. sextò restat excutiendum vocabulum ποιὰ, de cujus jam ambigitur significatu. Ποιὰ σχέσις verti solet relatio vel habitudo quædam; sed hanc interpretationem nuper è nostratibus egregius quidam Mathematicus improbat, & nescio quid abstrusioris mysterii sub involucro delitescere suspicatur adjecti ποιὰ. Mavult pro quædam substitui qualitativa, hoc est, (ut ipse explicat) quæ ad qualitatis prædicamentum spectet, ideo scilicet quia ratio cum indicatione vel situ partium figurarum speciem & qualitatem determinat. Rejicit autem interpretamentum vulgare, quia vox ποιὸς (ipsius verba sunt) ex usu perpetuo qualitatem respicit; neque tam indefinitè aliquam quàm aliqualem, seu potiùs qualitativam habitudinem hîc innuit, quæ nempe prædicamentum qualitatis spectat. Subjungit autem, Et quidem in accurata definitione nullo modo ferendum videtur, ut ratio definiatur indefinitè ratio quædam, sed determinandum erat, quænam relatio. Porrò, cùm responderi possit satis determinari relationem ex præcedentibus, præsertim ex adjecta conditione κατὰ πηλικότητα· negat hoc sufficere, quia datur alia relatio quantitatem ex æquo spectans, nempe toties memorata relatio secundùm differentiam, quæ tamen ut censet, non est ποιὰ σχέσις. Sed hanc ego tam subtilem expositionem non facilè tamen adducor, ut credam ipsius στοιχειωτοῦ sententiæ consentaneam. Nam primò duriusculum est, ut ποιὸς significet ad qualitatem spectans, vel qualitatis potiùs (secundùm ipsius doctissimi viri sententiam) effectivus seu determinativus.

Arithm. c. 25 contra Meib. 7.

Ἑαυτοντιμ. p. 60.

Va-

Valet equidem ποιὸς apud Aristotelem & alios passim idem quod qualis, vel aliqua quantitate præditus (ut qui habitu quovis, aut potentiâ, vel passione afficitur, ab eo denominatur ποιός τις) at qualificativus vel qualificus (sic enim expositioni suæ congruentiùs vertisset, quàm qualitativus) nusquam ut puto; ad id denotandum rectiùs adhibeatur ποιωτικὴ (nam ποιεῖν est talem reddere) vel explicatiùs ἡ τῶν σχημάτων ποιότης ἢ διορισικὴ. Igitur loquendi modum attribuit auctori satis improprium, inusitatum, obscurum, adeóque definitionum legibus & naturæ nimis incongruum. Addo quòd ab intrinseca rationis natura videatur satis remotum, eíque tantùm ex accidente competere, quòd nonnihil aliquando conferat ad figurarum speciem, seu qualitatem determinandam. Non in solis figuris consideratur, at sæpiùs extra illas, nec aliter illarum determinationi inservit, quàm magnitudinum quarundam, linearum nempe vel superficierum quibus ambiuntur figuræ, quantitates priùs determinando. Non igitur verisimile videtur, definitiones auctorem huc attendisse, quum definitiones necessaria tantùm, universalia, ac primaria notionum attributa complecti debeant. Et quòd ad rationis prædicamentum attinet, ipsa simpliciter ad relationem pertinet, respectivè verò propter terminos comparatos ad quantitatem (semper enim illi sunt res quantæ quatenus quantæ) reducatur, magísque propter fundamentum suum, quod est absoluta quæpiam quantitas, ut supra dictum. Vulgò dicitur & quantitatis proprietatibus accensetur, quòd ab illa

res dicuntur æquales & inæquales, hoc est, una alterius simpla, dupla, tripla, &c. hoc est, erga alteram tali ratione affecta. Ergò potiùs ratio est σχέσις quantitativa, sicut similitudo, quia fundatur in aliqua qualitate, dici solet relatio in qualitate, seu qualitativa. Absonum vero plerisque ni fallor auribus foret dici, relatio qualitativa secundùm quantitatem; nam si secundùm quantitatem, ergò quantitativa potiùs quàm qualitativa. Præterea, quòd non ut pertenditur vox ποιὸς etiam in definitionibus posita semper qualitatem aliquam proprie dictam, at verò sæpiùs meram particularitatem, hoc est, generalis vocabuli restrictionem indefinitam, designet (eo pacto ac si homo definiretur, animal quoddam ratione donatum, ubi quoddam innuit tantùm, confuse quidem & indistinctè nullos certos limites assignando, hominis nomen sub animalis nomine contineri, nec ei penitus adæquari) quòd, inquam, ità se res habeat, innumeris adstrui possit exemplis prostantibus apud veteres etiam Mathematicos. Ita Theon analogiam definit, Cap. XXI. Ἀναλογία ἐστὶ λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις, rationum inter se habitudo, non qualitativa opinor, quæ enim isthic intervenit qualitas? at quædam saltem. Musicæ harmoniæ genus (γένος) Aristides Quintilianus Pag. 16. definit, ποιὰν τετραχόρδου διαίρεσιν, non qualitativam credo significans divisionem nescio quam, at certam aliquam: quum scilicet tetrachordum innumeris modis dividi possit, genus tamen Musicum non omnescunque sectiones istæ, sed certæ quædam constituunt; una scilicet aliqua genus diatonicum, alia

chro-

chrometicum, tertia enharmonicum. Conſonat Euclides, Γένη (inquit) ἐστὶ ποιὰ ποιὰ τετράρων φθόγγων διαίρεσις. Idem Ariſtides, Ἡρμοσμένον ἔστι τὸ ἐκ φθόγγων, καὶ διαστημάτων ποιὰν τάξιν ἐχόντων. Ποιαν τάξιν, ordinem quendam, non ordinem opinor qualitativum. Nicomachus in Enchiridio διάστημα definit, ὁδὸν ποιὰν ἀπὸ βαρυτήτων εἰς ὀξύτητα ἢ ἀνάπαλιν. *Lib.I.* Ejuſdem eſt Thraſylli definitio, Ἔστι διάστημα φθόγγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις· *Theon.* ubi notabile eſt Arithmeticam ipſam rationem vel differentiam, quæ inter duos φθόγγους, ſeu ſonos harmonicos intercedit, diſtrictè vocari ποιὰν σχέσιν, quas ſcilicet doctiſſimus vir ſolam quantitativam relationem agnoſcit, & Geometricam rationem velut ei contradiſtinctam appellari cenſet ποιὰν σχέσιν, hoc eſt, relationem qualitativam. Quia verò ferenda non arbitratur in definitionibus accuratis indefinita talia vocabula, dicendum eſt optimos ſaltem authores admiſiſſe talia; præter mox adductos, unum citabo Euclidem, qui in Iſagogetharmonica proximè contiguis duabus definitionibus inſeruit vocabulum τις· Τόνος (inquit) ἐστὶ τόπος τις τῆς φωνῆς, διεξικὸς συστήματος, ἁπλατὴς. Et dein, Μεταβολὴ ἔστιν ὁμοίου πρὸς εἰς ἀνόμοιον τόπον μετάθεσις. Ecce τόπος τις, ὁμοίου πρός Non abhorruit is ſcilicet ab ejuſmodi vocibus, neque certè meâ ſententiâ abhorrere debuit Nam in omni prædicatione vocabuli latioris de anguſtiore, generalioris de magis ſpeciali, ſi non exprimitur, tacitè ſaltem intelligitur reſtrictio quædam. Ut cùm dicitur, Homo eſt animal, intelligitur animal quoddam; quòd

que subticetur in propositione directa, redditur & expressè pronunciatur in conversa, Quoddam animal est homo. Quod autem semper subintelligitur, id nonnunquam sine culpa proferri potest, quare non video cur improbari debeant istiusmodi definitiones; homo est animal quoddam ratione prædicum; triangulum ell figura quædam plana tribus rectis lineis comprehensa; ratio est relatio quædam homogeneorum quantorum secundùm quantitatem. Quòd verò definitionem hanc vulgari modò acceptam æquè convenire putat Arithmeticæ rationi, à qua tamen distingui debuit; ad id jam ante προληπτικῶς responsum est, cùm quid sit κατ' πηλικότητα, referri conati sumus explicare. Nunc tantùm adjiciam, elementatori hac in definitione tradenda non aliud forsan propositum fuisse, quàm ut methodi plenioris aut ornatûs qualiscunque causâ, præludens scilicet accuratioribus istis Ejusdem, Majoris, & Minoris rationis definitionibus mox subjungendis, generalem quandam & ὁλοσχερῆ τοῦ λόγου, idæam discentium insinuaret animis per Metaphysicam hanc definitionem; Metaphysicam dico, nec enim propriè Mathematica est, cùm ab ea nihil quicquam dependeat, aut deducatur in Mathematicis, nec ut existimo deduci possit. Cujusmodi quoque censeri potest posthac tradita definitio, vel definitio potiùs analogiæ; analogica est rationum similitudo, quæ nulli Mathematico deserviat usui, nec alio opinor fine proponitur, quàm ut per eam generalis quædam analogiæ notio, crassa licet & confusa, tyronibus indatur. Definitionibus autem exquisitis

ſitis Mathematicis, mox ab illo ſubjunctis tota rationum doctrina, tota res Mathematica ſubnititur; ad illas igitur potiſſimùm attendi debet, per illas rationum doctrina perfectiùs elucescit; hæc & conſimiles abſque notabili Matheſeos detrimento prorſus omitti poſſent: ſicut in Elem. VII. factum videmus, ubi numerorum analogia definitur & pertractatur, nullâ tamen rationis numero competentis exhibitâ definitione; quamvis illic æquè neceſſaria fuit & utilis definitio talis atque hîc eſt; ſed neutro loco magna fuit neceſſitas. Quanquam haud credo rem ipſam adeò generalem & abſtractam, eóque conceptu magis arduam & explicatu. definitionis eſſe capacem commodioris hâc quàm Elementator aſſignavit, quam ideò viſum eſt uberiùs explicare; neque non ab oppugnantium captionibus aſſerere. Ubi pedem figo nunc; proximâ Lectione rationis ad ſpecies, & ſymptomata potiora gradum promoturus.

LECT. IV.

RAtionis Geometricæ naturam utcunque delineavimus, definitionem ejus in elementis conſignatam quà explicando quà aſſerendo. Aliter (πυπωδες ὡς quidem & παχυλωτέρως, at fortaſſe magis ad captum communem) declaretur hæc res dicendo, quod ratio ſit modus determinatus quo unum quodvis quantum continet aliud, vel ab eo continetur, idem vel perſimilis ei modo, juxta quem unum alterius totuplum dicitur, aut al-

alterum toties continere ; vel esse talis pars vel tot partes alterius, aut toties in altero contineri ; qui certè modus, quum collata quanta numeris efferri possunt, facillimè comprehenditur à nobis ; ut modus quo libra continet unciam nil innuit aliud, quàm quòd hanc illa duodecies contineat, vel ad hanc se habeat, sicut 12 ad 1, unde libra dicitur ad unciam sortiri rationem duodecuplam. Modúsque quo longitudo pedalis in passu Geometrico continetur, nihil est aliud quàm illam hujus esse partem quintam, vel ad eum se habere sicut 1 ad 5, quod significatur dicendo rationem pedis ad passum esse subquintuplum. Qui modus abstracto vocabulo quintuplicitas, aut (verbo veniam) quintuplitas (πενταπλότης aut πεμπλασιότης) exprimitur & enuntiatur. Cùm verò collata quanta (quoad absolutam suam quantitatem) talia sunt, ut numeris perfectè nequeant exprimi, saltem intelligi potest, quòd aliquo determinato modo illud continet hoc, vel in hoc continetur, aliter scilicet quàm aliud quodvis illi inæquale continet, hoc vel in eo continetur ; ac ita quidem ut ille continendi modus persimilis sit ei, quo numeris denominata quanta se continent, aut in se continentur respectivè ; posítque simpliciter & ex parte rei semper numeris exprimi quàm proximè. Sicut v.g. cùm ratio peripheriæ circularis ad diametrum nobis quoad ἀκρίβειαν ignorata, repræsentatur dicendo, quod peripheria sit diametri tripla sesquiseptima, hoc est, teripsam contineat & ejus unam septimâm partem, apponendo ferè vel propè. Sic & ratio

tio diametri ad latus quadrati, quæ numeris exprimi præcisè natura rei non patitur, poteſt utcunque numeris ad verum accedentibus repræſentari; dicendo quòd diameter ſe habet ad latus, ut 1.4 ad 1 ferè; vel propiùs, ut 1.41 ad 1; vel adhuc accuratiùs, ut 1.416 ad 1: & ſic porro magis ad ἀκρίβειαν appropinquando. Verùm rationis naturam ulteriùs illuſtrare conabimur, primò ſpecies ejus & differentias exhibendo (ſiquidem ad generum perfectiorem notitiam lucis plurimùm & ſubſidii confert ſubjectarum ſpecierum comprehenſio, utpote quarum ex convenientia quoad eſſentialem aliquam proprietatem, conſtituantur & quaſi generantur ipſa genera) tum ſecundò, rationum accidentia quædam primaria (comparationes inter ſe, compoſitionem, continuationem, additionem, ſubtractionem, diviſionem, reductionem exponendo) nec non interea quæſtiones aliquas obiter incidentes in controverſia poſitas, non parum ad cujuſce materiæ dilucidationem conferentes, eventilando. Quod rationis ſpecies attinet, ejus diviſio naturaliſſimè prima terminorum diverſam affectionem conſequitur hoc modo: antecedens rationis vel major eſt conſequente, vel æqualis ei, vel minor eo; hinc tres rationis ſpecies ſubnaſcuntur: Ratio quanti majoris ad minus, æqualis ad æquale, minoris ad majus; communiter appellantur, Ratio majoris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis; poſſint autem ſimpliciùs & breviùs nuncupari majoritas, æqualitas, minoritas (nóſque nominibus his eas ſubinde brevitatis causâ deſignabimus) nonnulli verò

ma-

majoritatem & minoritatem vocitant rationem excessûs & defectûs; quæ vocabula nos quoque fortassis interdum adhibebimus. Eodem recidit ὑπεροχομία duplex, quum nempe ratio prim› scinditur in rationem æqualitatis & inæqualitatis, tum porrò subsecatur inæqualitatis ratio in rationem majoris & rationem minoris inæqualitatis. Quæ divisio proba satis & commoda; rectéque Nicomachus, *Lib. I. p. 24.* Τὸ πρός τι τοίνυν ποσὸν δύο αἱ ἀνωτάτω γενικαὶ διαιρέσεις εἰσὶν ἰσότης καὶ ἀνισότης· πᾶν γὰρ ὃν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρούμενον ἤτοι ἴσον ὑπάρχει, ἢ ἄνισον, κρεῖττον ἢ ἧττον τοῦτο ὄφειν. Res ex se clarior est, quam ut exemplis illustrari possit aut debeat; unum tamen apponemus, ratio libræ ad unciam (vel numeri 12 ad 1) est majoritas, aut ratio majoris inæqualitatis, aut excessûs ratio, quoniam antecedens consequente major est. Ratio ponderis quadrantalis ad 3 uncias est æqualitatis ratio, quoniam antecedens adæquatur consequenti; ratio verò unciæ ad libram est minoritas, vel ratio minoris inæqualitatis, vel ratio defectûs, quia antecedens consequente minor est. Nescio verò num attineat observare, quò devitetur ex ambiguitate pronascens error, quòd nonnunquam apud scriptores Græcos ratio majoris ad minus dicitur μείζων λόγος, æqualis ad æquale ἴσος λόγος, & minoris ad majus *Cap. 22.* ἐλάττων λόγος· Theon Smyrnæus, Τῶν λόγων οἱ μὲν εἰσὶ μείζονες, οἱ δὲ ἐλάττονες, οἱ δὲ ἴσοι· quas modò descripsimus innuens rationum species. Sed impropriè proferuntur, & bene nobis cavendæ sunt ejusmodi locutiones; nam ratio major, æqualis, minor, frequentiùs

quentiùs & magis propriè designant ipsarum rationum inter se comparatarum respectus, non singularum absolutè sumptarum rationum species. Instantiæ causâ, comparando rationis dodrantis ad trientem, & bessis ad trientem; major est ratio dodrantis ad trientem, quàm bessis ad trientem: (hoc est, major est ratio numeri novenarii ad quaternarium, quàm octonarii ad eundem quaternarium). Sed rationis dodrantis ad trientem, & bessis ad trientem, simpliciter in se spectatæ, non bene dicuntur majores rationes, sed majoritatis, aut excessûs, aut inæqualitatis majoris rationes, hoc est, rationes majorum quantorum ad quanta minora. Hæc est rationum prima divisio. Aliter autem dividitur ratio (vel inæqualitatis ratio, nec enim interest utrum ratio sic universim vel singillatim inæqualitatis ratio dividatur) aliter, inquam, ratio dividitur, intuendo quantorum ista symptomata, nobis jam ante quadantenus explicata, symmetriam dico & asymmetriam. Nam quia terminorum inter se comparatorum aliqui symmetri vel commensurabiles sunt, hoc est, eodem quanto semel aut aliquoties accepto mensurari, completè dividi, penitus exhauriri, adeóque numeris accuratè exprimi possunt; alii verò termini sunt asymmetri, vel incommensurabiles, hoc est, nullâ communi mensurâ mensurabiles, nullâ parte aliquotâ eidem gaudentes, & proinde sic affecti, nullis ut numeris possint exprimi, vel perfectè repræsentari. Hinc emergit divisio rationis in effabilem & ineffabilem, λόγον ῥητὸν & λόγον ἄῤῥητον. Ubi tamen notandum quòd hæ voces

ces (ῥητὸς ἄῤῥητος) ab Euclide in Elemento χ paulò secius usurpantur, cùm enim adverteret Euclides expositâ quâvis rectâ lineâ (quam ῥητὴν vocavit, utpote quolibet ad arbitrium numero denominabilem vel effabilem) cum illa comparatas lineas in triplice differentia versari; alias nempe longitudine cum illa commensurabiles esse; alias verò quoad longitudinem quidem incommensurabiles dari, sic tamen ut ipsarum quadrata commensurabilia sint, & numeris denominabilia, veras ipsorum ad expositæ quadratum rationes exhibentibus perfectissimè; alias autem complures non longitudine tantùm ipsi expositæ, sed potentiâ quoque (hoc est, secundùm ipsorum quadrata expositæ quadrato) incommensurabilia esse; hoc, inquam, cùm adverteret, priorum duorum generum lineas appellare voluit ῥηταὶς· hoc est, quadantenus & qualitercunque exprimibiles; at postremi generis lineas vocavit ἀλόγους vel ἀῤῥήτους, hoc est, nullatenus explicabiles, aut ineffabiles numeris. Itaque secundùm Euclidem asymmetra nonnulla quanta videntur habere λόγον ῥητὸν inter se (si enim quanta ipsa dicantur effabilia, consequenter ipsorum ratio fuerit effabilis) habent, inquam, longitudine (vel aliter in suo genere) commensurabilitatis incapacia quanta λόγον ῥητὸν, quatenus etsi nequit ipsorum rario numeris ullis communibus immediatè repræsentari, potest tamen quodammodo mediatè, quadratorum nempe suorum interventu, quando numeris illa verè denominantur & exprimuntur: siquidem inde dici possunt latera vel radices quadratæ talium nu-

numerorum ; cujuſmodi ſaltem expreſſio ſufficit ipſorum relativæ quantitati determinandæ, faciendóque cùm ut ipſa qualitercunque ſubjiciantur æſtimationi noſtræ, tum ut reipsâ facilè poſſint exhiberi. Verùm invaluit apud pleroſque, rationíque bene conſentaneum videtur, ut incommenſurabilium quantorum rationes dicantur ἄῤῥητοι, hoc eſt, ineffabiles ; quia ſcilicet hujuſmodi rationum termini vulgò notis & receptis numeris propriè & immediate nequeunt efferri, nóſque proinde ſenſum hunc retinebimus, quamvis maluit doctiſſimus Borellus (hanc forſan ambiguitatem vitans) dividere proportionem in commenſurabilem & non menſurabilem, vocabula nova comminiſcens, nec admodum ut exiſtimo commoda. Nam proportiones quantorum incommenſurabilium æquè ſunt ipſæ menſurabiles, ac proportiones quantorum commenſurabilium ; aptiùs opinor & accuratiùs mentem enunciâſſet ſuam obliquo caſu, dicens proportionem eſſe vel quantorum commenſurabilium, vel incommenſurabilium quantorum. Sed ἐν παρόδῳ hoc, ad rationum propoſitas ſpecies revertamur. Λόγος ῥητὸς, effabilis ratio eſt, quæ numeris exprimi poteſt ; numeris (inquam) veris, quos vocant, & vulgaribus ; integris, mixtis, fractis ; imò ſemper integris numeris exprimi poteſt : quandoquidem ratio quævis numerorum utcunque fractorum, vel ex integris & fractis compoſitorum, ſemper ad integros adduci poteſt per fractorum denominatores multiplicando. Exempla præſtant omnes ejuſdem generis menſuræ, in uſu vulgari conſtitutæ, quales

pro

pro dimetiendis longitudinum intervallis digitus, ſpithama, palmus, pes, cubitus, orgya, paſſus, ſtadium, miliare, leuca; pro taxandis ponderibus granum, drachma, uncia, libra; pro computandis pecuniis as, ſeſtertius, denarius, ſolidus, marca, libra; pro temporibus computandis annus, menſes, dies (civiles hos intelligo, nam an hæ partes temporis naturales ſint commenſurabiles inter ſe nullo conſtat, aut conſtare poteſt indicio) hora, minutum. Hæc enim & conſimilia quanta rationes inter ſe effabiles habent, eóque vulgares ad uſus accommodantur. Ratio, inſtantiæ causâ, marcæ ad libram effabilis eſt, quia numerus $\frac{3}{3}$ & 1, vel numeris 2 & 3, vel aliis quibuſvis ſubſeſquialteram obtinentibus inter ſe rationem exprimuntur. Sic & aſſis ad ſeſtertium ratio effertur numeris $\frac{2}{2}$ & 1, vel numeris 1 & $2\frac{1}{2}$, vel numeris 2 & 5; quæ ratio dicitur ſub-multiplex-dupla ſeſquialtera, ut ſtatim oſtendemus. Λόγος autem ἄῤῥητος (ineffabilis ratio, quibuſdam ἄλογος λόγος, ratio irrationalis, vel potius indicibilis, quia dici vel exprimi nequit) eſt illa quæ verſatur inter aſymmetra quanta, quorum ratio nullis numeris, veris & vulgaribus, exprimi poteſt exactè perfectéque. Talis eſt in exemplo vulgatiſſimo ratio diametri ad latus quadrati; nam in tota ſerie numerorum poſſibilium (integrorum, fractorum, miſtorum) nulli duo numeri poſſunt inveniri, nulli dantur omnino, quorum ratio repræſentat exquiſitè rationem quantis iſtis duobus intercedentem. Quoniam enim (quod in elementis demonſtratur) quadratum ex diametro duplum eſt quadrati ex latere

tere, nullíque dantur in tota vulgarium numerorum congerie numeri duo quadrati, duplex alter alterius, ergò nulli dantur numeri, qui rationem exhibeant diametri ad latus. Taléſque reperiuntur in omni genere quantorum innumeræ rationes, adeò quidem ut inter ſe comparando figuras regulares, cùm planas tum ſolidas, eidem circulo vel ſphæræ inſcriptas aut circumſcriptas, vix ullas invenire ſit, quæ vel quoad latera ſeu perimetros, vel quoad areas, & quoad ſoliditates ſuas rationem habeant inter ſe numeris explicabilem. Unde quo rationes horum & aliorum plerorumque quantorum qualitercunque referri poſſent ad numeros (utpote ſymbola quantorum generaliſſima, notiſſima, commodiſſima) neceſſe fuit numeros ſurdos (quos vocant & irrationales) comminiſci, quibus iſtorum quantorum rationes utcunque poſſent exprimi. Et harum quidem ineffabilium rationum nullæ recenſentur ſpecies (quia differentes, quibus ipſarum ærmini ſe continent aut reſpiciunt, modi bene concipi diſtingui nequeunt, & nullum excogitari proclive ſit pro iis aliter exprimendis compendium) at rationum, quæ vulgò numerantur, effabilium ſpecies percenſere conabor, & exponere quàm breviſſimè (quorſum enim quæ tradita proſtant ubivis, & per ſatis clara ſunt, operoſiùs inculcare? Mihi potiùs inſtitutum eſt, quæ protrita minùs, & magis involuta videntur, ſtudio meo qualicunque ventilata, judicio veſtro perpendenda commendare, quæ paſſim obvia, vel admodum aperta ſunt levi pede tranſcurrendo) ad rem. Nihil imprimis manifeſtius

eſt, quàm æqualium quantorum rationem ſemper effabilem eſſe, utpote quæ quibuſvis æqualibus numeris exprimi queat. Habet v.g. ſe quodvis æquale quantum ad aliud quodvis, ut unitas ad unitatem, vel binarius ad binarium. Igitur æqualitatis ratio conſtitui poteſt prima ſpecies effabilium rationum. Inæqualitatis autem ratio cùm duplex ſit, ut vidimus, majoritas aut minoritas, vel exceſsûs defectúſque ratio, majoritatis effabilis quinque vulgò ſpecies ſtatuuntur, quibus inverſe correſpondent totidem ſpecies minoritatis. Eas recenſebimus & exponemus, ita tamen ut diviſionis hujus fundamentum & originem (id quod in omni diviſione technica potiſſimùm ſpectari debet) prius inveſtigemus. Id aggredimur facere notando, quod cùm duo quanta comparamus inter ſe rationem habentia effabilem, vel eorum vice numeros quibus repræſentantur, modum ſcilicet inquirentes, quo antecedens conſequentem continet, aut in eo continetur, hunc repræſentare contendimus in numeris quoad ejus fieri poteſt minimis; quia ratio quævis in minimis terminis facilius æſtimatur & comprehenditur. Igitur enitimur, ut eorum alter, conſequens nempe, ſit ipſa unitas, numerorum infimus & ſimpliciſſimus; quo præſtrato terminum antecedentem indagamus unitati, tanquam conſequenti congruentem: iſte terminus rationis æſtimationi ſubjectæ denominator dicitur, ipſam quippe denominans, & declarans ad captum noſtrum commodiſſimè. Quoniam verò diviſionis Arithmeticæ talis eſt natura, ut quoties numerus dividendus di-

diviſorem continet, toties inventus quotiens contineat unitatem, ideo reperitur iſte denominator (vel antecedens rationis, cujus conſequens unitas) dividendo propoſitæ rationis antecedentem per conſequentem. Porrò, cùm denominator iſte, vel quotiens inventus, pro ipſorum terminorum intrinſeca diverſitate diverſimodæ ſpecie numerus eſſe poſſit (integer nempe, vel fractus, vel miſtus; & fractus quidem ac miſtus non uno modo) conſiderando puta v.g. rationem majoris inæqualitatis dictus quotiens per terminorum diviſionem repertus, poterit eſſe vel numerus integer, vel unitas cum adjecto numero fracto, cujus numerator ſit unitate major, vel numerus integer unitate major cum fracto adnexo, cujus numerator ſit unitas, vel denique numerus integer cum fractione, cujus numerus exſuperet unitatem. Ex his quinque dicti quotientis variis modis aut ſpeciebus emergunt quinque ſpecies majoritatis eſſabilis, quæ vulgò cluent ratio multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens; quibus opponuntur & inversè reſpondent (ἀνάλογον) & ἀνθυπαλλάσσει, verba ſunt Nicomachi) minoritatis rationes ſubmultiplex, ſubſuperparticularis, ſubſuperpartiens, ſubmultiplex ſuperparticularis, ſubmultiplex ſuperpartiens: quas nunc ordine perluſtrabimus. Multiplex vel multipla ratio dicitur inter duos terminos verſari, quum antecedens conſequentem continet multoties (unde nominis impoſitio) vel cùm antecedens conſequentem aliquot vicibus (bis, ter, decies, centies, aliquoties utcunque)

que) continet exactè; vel quum consequens antecedentem perfecte dementitur (ἀπαρτιζόντως καταμετρεῖ) hoc est, sic ut nihil quicquam supersit residui. Vel, quod idem est, cùm consequens est antecedentis pars quæpiam aliquota, quæ aliquoties accepta totum eum componit, exæquat, complet; adeóque denominator hujusce rationis est perpetuò numerus aliquis integer. Ita passus Geometricus ad pedem habet rationem multiplam, integro numero quinario denominatam; quia pes quinquies acceptus passum constituit præcise, vel quia passus quinquies includit pedem, & nihil præterea. Hinc liquet hanc rationem tot habere species sibi subordinatas, quot dari possunt integri numeri, per quos denominentur & distinguantur, infinitas. Ut ratio dupla, tripla, decupla, centupla, millecupla, &c. sunt rationis multiplæ species. Græcis autem dicitur hæc ratio λόγος πολλαπλάσιος (quasi πολλαπολλάσιος vel πολλαπλεονάσιος) & species ejus similiter terminatæ sunt διπλάσιος, τριπλάσιος, δεκαπλάσιος, ἑκατομπλάσιος, &c. Huic universè respondet & ἀντίστροφος est minoritatis ratio, submultiplex dicta, quam scilicet obtinent multiplicis rationis termini transpositi; ut si A sit multiplex τοῦ B, erit B submultiplex τοῦ A. Ideo ratio submultiplex est, quum antecedens consequentem justè demetitur, est ejus aliquota pars, aliquot vicibus in eo continetur; ejúsque denominator est semper aliquis simplex numerus fractus, habens unitatem pro numeratore. Ita pes ad passum rationem habet submultiplicem, utpote quinquies in passu

Theon.

paſſu comprehenſus, & denominatorem habens $\frac{1}{5}$. Habet item ſimiliter hujuſmodi ratio tot ſpecies, quot eſſe poſſunt numeri fracti ſimplices numero quolibet denominati, ſed unitatem obtinentes loco numeratoris. Ut ratio ſubdupla, ſubtripla, ſubdecupla, ſubcentupla, &c. Nam quia commodè ſignificari nequeunt hæ rationes vocabulis vulgò uſurpatis deſignantur à Mathematicis, præponendo ſub ipſis inverſarum multiplicium rationum nominibus. Quod attinet enim vocabula, ſecunda, tertia, decima, centeſima, milleſima (quibus efferuntur unitatis partes aliquotæ) non ita commodè poſſunt hiſce denotandis rationibus adhiberi, quia præterea ſunt ordinales, & nedum diviſionem in partes, at locum quoque certum indigitant rerum in aliqua ſerie diſpoſitarum: ut tertius à Romulo rex, ſapientum octavus, centeſimus abhinc annus; reſpondéntque Græcis πρώτῳ, δεύτερῳ, τρίτῳ, &c. ideóque ſubjacent ambiguitati. Aliàs non video quin ratio tertia, quarta, decima poſſint hiſce denotandis rationibus inſervire, æquè ac dupla, tripla, decupla multiplis. Vocabula verò ſemiſſis, triens, quadrans, &c. rationes quidem has indigitant, ſed obliquo tantùm caſu, nam bene dici poteſt ratio ſemiſſis, trientis, quadrantis ad unum; nec ipſa tamen ſemiſſis aut triens eſt ratio. A Græcis verò deſignatur hæc ratio terminatione μόριῳ aut μοιριαῖῳ (liquet unde deductâ) ſubjunctâ vocabulis numerorum ordinem ſignantibus; ut λόγῳ ἡμιμόριῳ (aut ἡμιμοιριαῖῳ) τριημόριῳ, δεκαημόριῳ, δωδεκαημόριῳ, &c. pro ſub lupla, ſubtri-

pla, &c. ſed ab hiſce ſubinde deſignantur hæ rationes anteponendo præpoſitionem ὑπό.
Pag. 25. Nicomachus, Οὕτω καὶ ἕκαστον ἑκάστῳ τῇ προλεχθείσῃ τάξει μετὰ τὴν ὑπὸ προθέσεως ἀντιδιαστελλόμενα, ὑποπολλαπλάσιον, ὑπεπιμόριον, ὑπεπιμερὲς· & apud illum, ὑποδιπλάσιος, ὑποτριτιλάσιος, & ſic porrò ſubmultiplicis ſpecies adnumerantur. Ex his patet quòd rationis multiplicis & ſubmultiplicis communes ſunt termini correlati totum & pars; accipiendo totum juxta nativam vocis originem, pro eo quòd toties aliud complectitur, & partem pro parte aliquota, juxta ſenſum & definitionem Euclidis; Μέρος ἐστι μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Sed ad alias ſpecies pro-
2. gredimur. Ratio ſuperparticularis dicitur, cùm antecedens conſequentem ita excedit, ut ſuperſit conſequentis pars quæpiam
Theon. c. 24 aliquota (hinc ratio nominis) vel cùm antecedens conſequentem ſemel, nec pluries includit, & præterea tantùm unam ejus partem aliquotam; vel cùm per conſequentem diviſus antecedens quotientem exhibet unitatem, cum unitate quoque reſidua per conſequentem adhuc dividenda; adeóque cujus denominator eſt unitas cum annexo numero fracto vice numeratoris habente unitatem. Talem rationem obtinet cubitus ad pedem, quia cubitus pedem ſuperat unâ parte dimidiâ pedis; ſic & dodrans ad beſſem rationem habet ſuperparticularem quia dodrans beſſem continet ſemel, & ejus inſuper partem octavam, vel quia $\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$. Rationis hujus quoque ſpecies infinitæ ſunt, pro denominatorum infinita multitudine; quæ di-

ſtinctè

ſtinctè ſignificari ſolent ad numerorum ordinalium nomina præfigendo particulam ſeſqui (hoc eſt, ſe atque partem aliquam præterea; licèt aliter minùs ad rem noſtram ἐπιμολόγεσι Grammaticorum filii) ut ſeſquialtera (vel ſeſquiſecunda) ſeſquitertia, ſeſquidecima, ſeſquicenteſima; quæ voces ſic intelligi debent, cùm antecedens conſequentem ſuperat unâ parte dimidiâ, (quomodo 12 excedit 8, vel as beſſem) dicitur ille ſeſquialter, aut ſeſquiſecundus hujus: cùm antecedens conſequentem ſemel includit, & ejus unam partem tertiam (ut 12 excedit 9, vel as dodrantem) dicitur is hujus ſeſquitertius: & ſimili perpetuò ratione. Græcis hæc ratio dicitur λόγος ἐπιμόριος (propter particulam conſequentis unitati ſubnexam modo expoſito) & deſignantur ejus ſpecies ordinalibus numeris præponendo ἐπί. Ut ὁπιδεύτερος (qui ſæpiùs ἡμιόλιος, quaſi totus conſequens cum ejus ſemiſſe, vel totus antecedens demptâ conſequentis ſemiſſe; ſed & obiter adnoto Græcos antecedentem hujus rationis plerumque efferre, præponendo conſequentis nomini vocem τρι μι· ut τριμιώριον ſeſquihora, τριμιόβολον ſeſquiobolus; quia nempe ſeſquihora (hoc eſt, una hora cum horæ ſemiſſe) eſt dimidia pars trium horarum, & ſeſquiobolus eſt ſemiſſis trium obolorum: ſed in orbitam). Species, inquam, hujus rationis à Græcis nominantur ὁπιδεύτερος (vel * ἡμιόλιος) ſeſquialter, ἐπίτριτος ſeſquitertius, ὁπιδέκατος ſeſquidecimus; & ita ſimiliter. Hujus rationis inverſa vel ὑποπολόγος (antequam progredior hoc adverto, quòd à veteribus Arithmeticis

* *Apud Theonem* ἐφημιόλιος. *forſan ex mendo.*

ticis rationum majoritatis ſpecies (vel ipſarum denominatores) dicebantur πρόλογοι, minoritatis autem iis correſpondentes ſpecies ὑπόλογοι· unde Nicomachus ait, Τὰς ὑπολόγους ἀνθυπακούειν τοῖς προλόγοις, hypologos prologis ex adverſo reſpondere: ut v.g. ratio quadruplex eſt πρόλογος, ratio ſubquadruplex ὑπόλογος; ratio ſeſquitertia eſt πρόλογος, ratio ſubſeſquitertia eſt ὑπόλογος· & ita de reliquis quæ ſubſequuntur. Rationis, inquam, ſuperparticularis hypologus vel inverſa dicitur ſubſuperparticularis (etiam *Met.IV.* Græcis ὑπεπιμόριος· quæ vox alicubi ſuccurrit hoc ſenſu apud Ariſtotelem) ſicut & ejus ſpecies ſubſeſquialtera, ſubſeſquitertia, ſubſeſquidecima, & ſic perpetuò; Græcis itidem ὑφημόλιος, ὑποεπίτριτος, ὑπεπιδέκατος. Quarum rationum indoles ſatis eluceſcit ex oppoſitarum perſpecta natura; differunt enim ab iis ſolâ terminorum tranſpoſitione, & ipſarum denominatores ita ſe habent ad unitatem, ut unitas ad denominatores rationum ipſis inverſarum. De quo tamen hoc adnotabimus, quod rationis ſubſuperparticularis denominator eſt ſemper aliquis numerus fractus, cujus numerator à denominatore deficit unitate; ut ſubſeſquialteræ denominator eſt $\frac{2}{3}$, ſubſeſquitertiæ $\frac{3}{4}$, & ſic continuò. Procedimus ad rationem ſuperpartientem, ea dicitur inter duos numeros haberi, quum antecedens conſequentem ſuperat partibus quibuſdam aliquotis, unà pluribus (hinc nominis cauſa). Vel cùm antecedens conſequentem ſemel includit, & plures adhuc ejus partes aliquotas (plures ſcil cet partes, quæ partem unam ali-

aliquotam conficere nequeunt; notanda eſt hæc exceptio, quo diſtinguatur hæc ſpecies a ſuperparticulari) vel quum antecedens per conſequentem diviſus exhibet unitatem pro quotiente, cum reſiduo unitatem excedente; idcircóque cujus denominator eſt unitas cum adnexo numero fracto, cujus numerator unitatem ſuperat. Ita dodrans ad ſeptuncem (hoc eſt, numerus 9 ad 7) habere dicitur rationem ſuperpartientem, qui dodrans ſeptuncem exſuperat duabus ſeptimis partibus. Gaudet & hæc ratio ſpeciebus infinitis, ex denominatorum infinita varietate, quæ verbis ita ſunt exprimendæ, ut fractionis unitati ſubnexæ (in denominatore propoſitæ rationis) cùm numerator tum denominator enuncientur. Appellantur nempe ratio ſuperbipartiens tertias, quintas, ſeptimas, &c. In exemplum, ratio numeri 12 ad 7, hoc eſt, aſſis ad ſeptuncem, dicitur ſuperquinquipartiens ſeptimas; in qua locutione numerale ſeptimas diſtinctè commonſtrat, cujuſmodi partibus aliquotis antecedens conſequentem excedit; quinque verò denotat quot ex ejuſmodi partibus ipſum excedit. Nec abſimiliter in cæteris. Verùm (ut diximus) obſervari debet exceptio, quòd antecedentis ſupra conſequentem exceſſus non debet ullo modo partem unam aliquotam conſtituere; vel quòd unitati ſubnexa fractio minimis terminis prolata non debet unitatem admittere loco numeratoris: tunc enim ratio non ſuperpartiens erit, prout hinc diſtinctim accipitur, at ſuperparticularis. Ut v.g. aſſis ad dodrantem ratio (vel numeri 12 ad 9) non ſecundùm hujus diviſionis inſtitutum,

&

Pag. 31. & τὸν τῆς τεχνολογίας καὶ ἀλληλίαν, ut loquitur Nicomachus, dicetur ratio ſuperpartiens, at ſuperparticularis, ſeſquitertia, quoniam as dodrantem excedit unâ dodrantis parte tertiâ, hoc eſt, 3 unciis. Quamvis ſecundùm rei veritatem, hâc limitatione ſepoſitâ, dici poſſit hæc ratio ſupertripartiens nonas, quatenus 12 ſuperat 9 per 3, quæ eſt $\frac{3}{9}$ dodrantis; quæ fractio æquipollet ipſi $\frac{1}{3}$. Verùm exigit harum rationum diſcrimen, ut denominatores ipſas diſtinguentes efferantur terminis ſimpliciſſimis & omnium minimis; alioqui vel ipſa ratio multiplex cum ſuperpartiente quodammodo coincidet; nam inſtando, ratio 9 ad 3 vere dici poteſt ſuperſextipartiens tertias, quia 9 excedit 3 ſex partibus tertiis ipſius 3, hoc eſt, 6 unitatibus; ſed liquet multò ſimplicius & commodiùs hanc rationem enunciari, dicendo quòd 9 ſit multipla, tripla nempe τοῦ 3. A Græcis autem hæc ratio vocitatur λόγος ἐπιμερὴς, quaſi parti partem adjiciens; quoniam antecedens non unâ ſolâ parte aliquotâ conſequentem excedit, at præter hanc aliâ quâdam, aut aliis partibus. Ut 5 continet 3 ſemel, & ejus duas quintas, hoc eſt, unam quintam & alteram inſuper quintam; & 11 ſuperat 6 ejus parte dimidiâ (3), & tertiâ (2); ſcilicet 11 = 6+3+2: (ita vocem ἐπιμερὴς expono, propter difficultatem quandam mox attingendam, quæ ex hujuſmodi tantùm interpretatione videtur ſolubilis). Hinc & hujus rationis ſpecies ita nominantur, Λόγος δὶς ἐπίτριτος, δὶς ἐπιπέμπτος, τρὶς ἐπιτέταρτος, τρὶς ἐπιδέκατος, & in ſimilem formam. Puta ratio quincuncis ad quadrantem

tem (hoc est, numeris 5 ad 3) dicitur δὶς ἐπίτριτος, quia 5 continet 3 semel, & ejus duas partes tertias, vel ejus tertiam partem bis; & ratio numeri 13 ad 10 est τρὶς ὑπὸδέκατος λόγος, quia 13 continet 10 semel, & ejus præterea decimam partem, unitatem nempe ter, ac in reliquis consimili pacto. Adnoto tamen Nicomachus aliter compingit harum rationum nomina; nam ὑπὸμερεῖς λόγους divisit primum in ὑπὸδιμερεῖς, ὑπὸτριμερεῖς, ὑπὸτεταρτομερεῖς, &c. ex prædictarum fractionum numeratoribus; tum harum rationum singulas ex earundem denominatoribus subdivisit, ut puta ὑπὸδιμερῆ in ὑπὸδίτριτον, ὑπὸδίπεμπτον, ὑπὸδιέβδομον, &c. & ὑπὸτριμερῆ in ὑπὸτρὶστέταρτον, ὑπὸτρὶπέμπτον, &c. Hujus autem rationis, quæ secundum minoritatem opposita est, una cum ejus speciebus, ex hinc (ut in præcedentibus) facile intelligitur. Differt enim quoad rem solà terminorum transpositione, quoad appellationem tantùm vocem sub vel ὑπὸ præfigendo; subsuperpartiens, subsuperbipartiens tertias, quartas, decimas, &c. ὑπερμερὴς, δὶς ὑπερμερὴς, δὶς ὑπερτρίτος, τρὶς ὑπερτέταρτος, &c. quare nil attinet his diutiùs immorari. Et hæ quidem tria sunt simpliciorum rationum genera, cùm antecedens consequentem non nisi semel continet. Existant è prima (multiplice) cum reliquis duabus (superparticulari & superpartiente) quo cumque modo conjuncta resultantes alteræ duæ, multiplex superparticularis & multiplex superpartiens; ac his inversæ. Cum scilicet antecedens consequentem pluries includit, & unicam insuper partem ejus aliquotam (ut dodrans continet tri-

trientem bis, & ejus præterea quartam partem) dicitur horum terminorum ratio generaliter multiplex ſuperparticularis, ſpecialem autem in exemplo propoſito ratio dupla-ſeſquiquarta: & ſic in aliis. Hujúſque ἀνάπαλιν ratio, numeri 4 puta ad 9 dicitur in genere ſubmultiplex ſuperparticularis, in ſpecie ſubdupla ſeſquiquarta. Græcis pari modo prior πολλαπλασιεπιμόριος, poſterior ὑποπολλαπλασιεπιμόριος, nuncupatur. At cùm antecedens conſequentem pluries continet, ampliúſque plures unâ partes ejus aliquotas (ut bes continet quadrantem, vel numerus 8 numerum 3, bis, & duas ejus partes tertias) ita ſe habentium terminorum ratio dicitur generatim multiplex ſuperpartiens, ſpecialim in exemplo propoſito dupla ſuperbipartiens tertias: & ad hunc modum in reliquis. Hujus item inverſa, veluti numeri 3 ad 8, dicitur in genere ratio ſubmultiplex ſuperpartiens, in ſpecie ſubdupla ſuperbipartiens tertias. Græcis itidem ſimili pacto prior majoritatis ratio dicitur πολλαπλασιεπιμερὴς, poſterior (minoritatis) ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς. Nec his exiſtimo ſatis liquidò manifeſtis ulteriùs inſiſtendum. Ita rationum effabilium genera (quinque majoritatis & illis oppoſita minoritatis totidem) utcunque recenſuimus & expoſuimus breviter; nec ulla datur per numeros exprimibilis inæqualitatis ratio, quæ non ad harum aliquam redigatur; quatenus omne quantum majus continet minus aut aliquoties perfectè adeóque multiplex eſt ejus (& hoc illius ſubmultiplex) aut ſemel & ejus unicam partem aliquotam, adeóque ſuperparticulare

culare est ejus (& hòc illius subsuperparticulare); vel semel & plures ejus partes aliquotas, unde superpartiens est ejus (& hoc illius subsuperpartiens) vel pluries & unicam ejus partem, quare multiplex superparticulare dicetur (& hoc illius submultiplex superparticulare) vel pluries demum & plures partes aliquotas, quamobrem id hujus erit multiplex superpartiens (& hoc illius vicissim submultiplex superpartiens) neque rei natura plures admittit continendi modos, adeò perfecta est hæc enumeratio. Attamen apud Theonem Smyrnæum reperio, *Cap. 28.* præter hasce species aliam adnumerari, quam simpliciter effabilem esse dicit, ejúsque terminos habere rationem numeri ad numerum, sed à prædictis distinctam; quam ideò nomine designat ὐδετέρου λόγου· &, Ἀριθμοῦ *Cap. 22. 28.* (inquit) πρὸς ἀριθμὸν λόγος ἐστιν ὅταν ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάττονα ἐν μηδένι εἴη τῶν προειρημένων λόγων. Exempli loco subjicit rationem quæ versatur inter terminos harmonici intervalli, quod λεῖμα dicitur, habentes se majorem cum minore comparando, sicut 256 ad 243: Καθὰ (inquit) δειχθήσεται καὶ ὁ τὸ λεῖμα περιέχων φθόγγος λόγος ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν, ἔχων τοὺς ὅρους ἐν ἐλαχίστοις, ὡς ὁ σνς πρὸς σμγ. Hunc sectatus Meibomius, in dialogo de proportionibus (an alios veteres nescio, saltem hunc) *Porrò*, inquit, *& hoc monendum numeri ad numerum rationem dici, quando major ad minorem in nulla fuerit prædictarum rationum, cujus rationis est limma in harmonicis contentum his minimis numeris* 256 *ad* 243. Quod ob dictum ita vapulat, *Omnino somniâsse videtur.* Non immeritò quidem id,

juxta

juxta rei veritatem & rationis ſuperpartientis nomen intelligendo ſecundùm vulgarem acceptionem. At non ſolus Meibomius è ſuo cerebello, ſed Theonem (ut vidimus) nactus contubernalem, & ejus affatus authoritate dormitavit. Quid igitur ipſe Theon, an erravit? Videtur quia ratio limmatis eſt planiſſimè ſuperpartiens, nempe ſupertredecupartiens ducenteſimas quadrageſimas tertias; nec igitur à prædictis diſtincta. Nodum hunc aliter expedire nequeo, nec ab errore Theonem eximere, quàm dicendo Theonem, & alios fortaſſe vetuſtiores Mathematicos, rationem ἐπιμερῆ rectiùs intellexiſſe, pro tali ſolummodo ratione, cujus antecedens ita conſequentem excederet, ut reſiduum dividi poſſet in duas partes ſimplices conſequentis aliquotas (ſimplices appello quarum numerator eſt unitas) eo pacto quo ſicut oſtendi priùs comparando 11 cum 6, reſiduum 5 continet 3 & 2, quorum 3 eſt una dimidia pars, & 2 una tertia conſequentis 6. Unde dicta videatur hæc ratio ἐπιμερὴς, ex mente ſaltem Theonis, & ex interpretatione τῶ λόγω ἐπιμερῶς quam ille tradit. Juxta quam acceptionem limmatis ratio non erit ἐπιμερὴς: nam 13, exceſſus numeri 256 ſuper 243, divi n quit in duas partes ſimplices aliquotas conſequentis 243, ut experiendo conſtabit. Bullialdus aliud exemplum ſubjicit numeri 29 ad 23, difficultatem hanc aut non advertens omnino, vel conſultò diſſimulans, & Theonis errori, ſiquidem error fuit, ſubſcribens. Nam numeri 29 ad 23 ratio eſt planè ſuperſextipartiens vigeſimas tertias, accipiendo rationem ſuperpartientem modo

Ad cap. 22. Theo. Smyr.

modo communi. Sed de hac re ſatis. Potuiſſem adjeciſſe regulas inveſtigandi terminos quotlibet harum omnium jam expoſitarum rationum; at præterquam quòd audientium intelligentiæ vix accommodari poſſet hoc, & non admodum utile foret, & multa verba depoſcens chariſſimi temporis nimium devoraret; adeat, ſi cui volupe eſt hæc ultra proſequi, Clavium in præcedaneis ad V elementum, vel è vetuſtioribus Nicomachum in Arithmeticis. Ego jam conquieſco.

LECT. V.

RAtionis in præcedentibus naturam expoſuimus, & percenſuimus ſpecies: ad ejus proximè accidentia quædam excutienda devenio. Accidit autem rationibus juxta vulgarem loquendi modum, quantorum ad inſtar, addi & ſubtrahi, augeri & imminui, protrahi & contrahi, multiplicari ac dividi, inter ſe ſecundùm æqualitatem & inæqualitatem comparari; quorum ultimum cùm præcipuum ſit in ſe, reliquiſque penitus intelligendis neceſſarium, ut & toti rationum doctrinæ illuſtrandæ, de eo primùm diſquiremus. Ita tamen ut meâ referat præfari rem aggredi me ſubtiliſſimam & intricatiſſimam, ſeu rei naturâ, ſive tractantium culpâ denſiſſimis nebulis involutam, quibus ut omnino liberetur, non eſt quòd mea tenuitas aut ſperet aut ſpondeat, præſertim cùm difficillimum experiar obverſantes, hæc ſeriò

meditatione perpendenti, cogitationes aptis verbis enunciare, clarâ methodo digerere. Integrum quinquennium impendiſſe ſe profitetur M. Meibomius huic ſpeculationi, neque præter leviculos quoſdam criticiſmos ſani quicquam aut ſolidi videtur elephantinus ille partus in lucem protuliſſe. Diutiùs, opinor, & graviùs eidem incubuit (an ferè ſuccubuit dicam?) maximus vir, & recentium Geometrarum nulli poſthabendus Gregorius Vincentius, attamen ut rem meo judicio reliquerit, haud minùs obſcuram quàm invenerit, fuſiſſimè licèt & elaboratiſſimè pertractatam. Quid igitur à paucularum horarum ſtudio, quid (ut cætera taceam) ab hac extemporanea pene ſcriptione circa materiam ejuſmodi contumaciter perplexam meritò poſſit expectari? Sed obſequendum eſt nihilominus inſtituto noſtro; pergendum eſt in itinere ſuſcepto, prærupto quantumvis & impedito; ſuggerendum eſt aliquid utcunque crudiùs & alperiùs à maturiori judicio veſtro excoquendum & elimandum. Hæc prælocutus, ad opus accingor atque certamen multiplex. Imprimis autem decidenda venit quæſtio, dicendorum intelligentiæ maximopere conducens. Quum nempe rationes, haud ſecus quàm abſoluta quævis quanta, dicantur inter ſe comparari, ſic hæc æqualis ſit aut inæqualis illi; quum componi, reſolvi; addi, ſubtrahi; multiplicari, dividi; poteſt ambigi quo ſenſu debeant hæc intelligi, num propriè vel impropriè: vel, an rationes accuratè loquendo res quantæ ſint, quantitatis affectionibus iſtis, æqualitati, inæqualitati, rationi, compoſitioni, diviſioni,

ſioni, reliquiſque propriè ſubjacentes. Pleríque recentiores in hac ſententia verſantur, ídque diſertis verbis aſſeverant, rationem eſſe genus peculiare quantitatis, eíque quantitatis attributa jure competere: hoc Vincentius toti ſuarum proportionalitatum doctrinæ ſubſternit, eíque ſuccinit eruditiſſimus ejus conſocius Tacquetus; inculcat hoc D. Hobbius adverſario ſuo doctiſſimo nihil reclamante; agnoſcit idem egregius ille Borellus, *Agimus* (inquit) *jam de nova ſpecie quantitatis.* Quid Merſennum, Meibomium, alios referam, cùm uno ore videantur omnes, præſertim qui circa proportionalitatis doctrinam innovare ſtuduerunt, huic altipulari ſententiæ? Nihilominus audendum eſt mihi tot & tantis viris obniti, tam illuſtri authoritati ἀνθενέπειν. Veritas exigit (ſaltem exiſtimata mihi) à tam validis hoſtibus aliquale patrocinium: hæc certè ſententia mihi non ſolùm falſa, ſed & admodum noxia videtur, quippe quæ controverſias aliquam multas inutiles genuerit & foverit, plurimaſque (ſicuti mihi videtur) confuſiones, ἀνυπολογίας, errores invexerit in proportionum doctrinam. Pluſculæ, arbitror, reſecabuntur lites, difficultates auferentur, evitabuntur errores, & tenebriæ diſcutientur, aſſerendo rationem non eſſe genus quantitatis, nec quantitati ſubjacens quid, & quantitatis attributa neutiquam propriè, per ſe, directè, nec aliter quam per καταχρησιν aut μεταφορὰν quandam ei convenire. Et ſane mirum videatur aliter quemvis cenſuiſſe; quum enim ratio ſit & agnoſcatur pura puta relatio, quomodo veluti tranſire poteſt

Ad 7. def. lib. 3.

in aliam categoriam, & genus aliquod conſtituere quantitatis? Quum nil ſit aliud quàm duorum quantorum reſpectus in quantitate fundatus, quomodo poterit ipſa concipi res ex ſe quanta, vel quantitati ſubjacens? Quum ſit abſtracte relatio, quomodo concretè dicatur relata? Annon hoc eſt res abſolutas cum reſpectivis, nomina concreta cum abſtractis confundere? Hactenus docuerunt Logici relationes ineſſe, tribui, niti rebus abſolutis; res autem abſolutas relationibus inhærere, vel accidere nemini dictum, opinor, vel auditum Logicæ ſtudioſo. Sicut nec relationes ipſas referre, reſpectus ſe reſpicere, habitudines hoc vel illo modo ſe habere, diſtantias diſtare, ſimilitudines aſſimilari, comparationes inter ſe conferri, dictu plauſibile, conceptu poſſibile videtur. Cùm e. g. dicitur, hæc ratio major eſt illâ, primùm (ex adverſariorum ſententia dictum id proprie ſumentium) tribuitur rationi magnitudo quædam, ſeu quantitas, inhærens vel accidens rationi; propter quam refertur ad aliam, vel in qua fundatur ejus ad aliam ratio; tum interpretativè conſequentérque dicitur, inæqualitas hæc inæqualis eſt illi inæqualitati, hæc majoritas major eſt iſtâ majoritate: ita res abſolutæ relationibus ineruntac innitentur, relationes attribuentur relationibus; concretæ voces de paronymis ſuis, & ejuſdem familiæ vocibus abſtractis prædicabuntur. Porrò quâ causâ quóque jure, rationes inter ſe comparando ſibi pronunciet aliquis æquales proprie vel inæquales, & inter ſe rationem obtinere, poſſit eàdem causa æquóque jure,

ſa-

rationes istarum rationum conferendo æqualitatem iis & inæqualitatem novíque generis adeò rationem assignare; quin & harum ulteriùs rationum alias rationes statuere, ac ita nunquam desituro ad infinitum progressu. Si ratio quantitatis genus sit, à magnitudinum comparatarum quantitate distinctum, & rationem ipsa sortitur, hæc nova ratio pari jure novum quantitatis genus erit, & rationis hujus ratio genus alterum distinctum constituet, & sic infinita quantitatum genera lucrabimur, hactenus nemini puto vel in somnis cogitata, neminíque sano cogitanda. Verùm merito videtur & respuitur à Philosophis hujusmodi nimium liberalis & facilis entium multiplicatio, minimè necessaria neutiquam comprehensibilis. Addo, quod nulla rationis cujusvis quantitas immediatè discerni, vel per se potest æstimari; non sensum incurrit, non per effectus se prodit, non ullà certà ratione colligitur aut comprobatur; ut posthac ostendere conabimur. Itaque gratis supponitur & affirmatur, eádémque facilitate rejici potest ac abnegari. Sed contra primum nostrum discursum objici posse video sic instando percontandóque: relatio patris ad filium, annon similis dici solet, & verè dicitur relationi principis ad subditum, ducis ad militem, pastoris ad gregem? Ac ita relationi relatio, paternitati similitudo tribuitur ac inest. Repono breviter primò, saltem ejusmodi relationes paternitas & similitudo sunt admodum diversæ naturæ, neque cùm dicitur paternitas est similis, committitur ejusmodi absona reduplicatio, nominúmque concretorum cum abstractis confu-

fusio, qualis incurritur dicendo, similitudo est similis, vel inæqualitas est inæqualis. Sed respondeo potiùs secundò, cùm dicitur paternitas est similis principatui, istа similitudo non in ipsis fundatur relationibus, nec in aliquo quod iis inest, sed in rebus absolutis, quibus & ipsæ dictæ relationes innituntur; vel in aliis rebus absolutis quæ consequuntur & exurgunt ab illis fundamentis: quia scilicet gignere filium & populum aggregare, regere familiam & civitati præsidere, similia sunt; quoniam affectu prosequi, consilio juvare, pœnis coercere; curâ ac operâ prodesse, providere, tutari; reverentiam, obsequium, gratitudinem sibi debita exigere, communia sunt patri principíque; hinc pater & princeps absolutè multis de causis & multis nominibus (ut talibus affecti qualitatibus, agentes talia vel patientes) similes dicantur: unde per translationem nominis ipsæ relationes, paternitas & principatus, similes prædicantur; non quia πρός τι hæ strictâ proprietate referuntur ad se (quomodo enim intelligi poterit, cùm paternitas & principatus nil sint aliud quàm τὸ esse ad alia, convenit ipsis alterum esse ad aliud; ut nempe dicatur, hoc esse ad aliud est ad aliud?) Sed quia relationibus istis perpetuò conjunguntur istiusmodi qualitates aut actiones, propter quas ipsi termini relati vere similes habeantur. Igitur hæc similitudinis relatio non tam inhæret dictis relationibus, quàm ipsas comitatur, ipsísque propter hanc accomitantiam attribuitur. Non absimile quid contingit in hac quam prosequimur materia: quæ nempe quantis absolutis revera

com-

convenit æqualitas aut inæqualitas, aut ſpecialis quælibet ratio, ipſorum rationibus adſcribitur. Quum e. g. ratio ſextupla dicitur major reſpectu, & quidem dupla, rationis triplæ, nil ſignificatur aliud, quàm rem denominatam numero ſenario majorem eſſe, in dupla ratione majorem, re denominata numero ternario; vel antecedentem unius rationis æquare duplum rationis alterius antecedentem; propter quem inæqualitatis modum una ratio, quaſi metonymicè dicatur alteri taliter inæqualis. Quòd ſiquis attentè rem animo penſitet, agnoſcere poterit, etſi veriſſimè dicatur & non impropriè, ſextuplum tripli duplum eſt (concretas nempe voces adhibendo, adeóque res quaſdam abſolutas involvendo) tamen non verè nec propriè nominibus abſtractis intendo, dici ſextuplicitas eſt dupla triplicitatis. Certe ſextuplum ſemper dividi poteſt in duo tripla; triplum duplicari poteſt, & bis accipi, ſic ut ſextuplum componat. Aſt ipſa ſextuplicitas videtur eſſe quid indiviſibile, neque triplicitas apta eſt compoſitionem ingredi. 3-|-3 exæquat 6; at eſſe triplum-|-eſſe triplum (hoc eſt, triplicitas -|- triplicitas) qualem ſummam efficiat non aſſequi poſſum cogitando. Triplex eſt trihorium horæ, triplex triennium anni, iſta triplicitas huic triplicitati adjuncta, quæ Mathematicè computabilem ſummam efficiant, equidem non capio; video potiùs ex duabus iſtis Metaphyſicè duabus, triplicitatibus ſextuplicitatem nullam conflari vel emergere. Cæterùm ut hæc dilucidiùs pateant, & quòd nulla poſtulet neceſſitas diſtinctam aliquam ratio-

nibus quantitatem assignari, circa rationum συγκρίσεις nonnulla pressiùs advertemus. Adverto nempe primò, Quod nullæ rationes inter se comparari possunt, sic ut innotescat aut æstimabilis reddatur illa, quæ adversarii pertendunt, ipsarum ratio, nisi priùs ad commune consequens reducantur, immediatè nimirum aut mediatè, actu & explicitè, vel virtualiter & implicitè. Scire v. g. nemo potest aut concipere, quænam ratio, num numeri 12 ad 3, vel 4 ad 2 major sit, aut quomodo major, nisi considerando quòd 12 ad 3 taliter se habet ut 4 ad 1, & 4 ad 2 sicut 2 ad 1. (Vel unitatis loco quodvis aliud substituendo commune consequens, puta 5, considerando quòd 12. 3 :: 20. 5 & 4. 2 :: 10. 5). Quibus consideratis atque perspectis, tum demum ex antecedentium, in hisce novis, quipollentibus rationibus, collatione dignoscitur ipsarum rationum inæqualitas & ratio (quæ dicitur). Unde provenit hoc, quàm exinde, quòd rationes ipsæ nullam ex se quantitatem habent ullatenus imaginabilem, distinctam à terminorum suorum quantitate, nullam propriè dictam inæqualitatem; at saltem, postquam commune consequens obtinent, propter antecedentium inæqualitatem inæquales & ipsas denominari? 1.

Pariter adverti poterit secundò, quòd cùm duarum quarumcunque rationum termini sunt heterogenei, nullatenus illæ comparari possunt aut æstimari, nisi priùs ad commune genus aliquod revocentur. Proponantur e.g. duo pondera & duo tempora, quænam sit major ratio duorum istorum ponderum, an binorum temporum, dignoscatur aliquatenus; 2.

nus; nec alio ferè quàm hoc pacto: Adſumatur aliquod quantum, cujuſvis generis pro lubitu tuo: (ſed commodiſſimè plerunque propter ſummam rectarum linearum ſimplicitatem, & capacitatem exprimendæ cujuſvis rationis, adſumetur recta linea) adſumatur, inquam, recta quævis linea, quòd ſi fieri poſſit ut primum pondus ad ſecundum, ita linea quævis ad lineam acceptam; item ut primum tempus ad ſecundum, ita quædam linea ad eandem itidem aſſumptam; tum ſicut ſe habet prior linea ſic inventa ad ſecundam ita repertam, taliter habere ſe dicetur ratio ponderum ad rationem temporum; dicetur, inquam, idcirco quia dictæ lineæ taliter ſe habent, ab ipſarum ratione denominationem hanc mutuando. Poſſet commodiſſimè loco lineæ numerus adſumi, modò conſtet propoſitas rationes ponderum & temporum numeris explicabiles ſore; at ſi non conſtet, aut quod multoties evenit, reipsâ non contingat hoc, numerus ad hanc σύγκρισιν ineptior eſt. Unde minùs rectè, quod obiter adnoto, vir eximius, in opere Arithmetico numeris omnibus abſoluto, pronunciáſſe videtur omnes rationes exiſtere in genere numeroſo: quaſi verò reliqua quanta, numerorum omni conſideratione ſeclusâ, rationem non obtinerent, eámque ſatis notabilem atque tractabilem? Quamobrem præſertim ſit ejuſmodi ratio, modo quolibet in genere numeroſo, quæ cùm poſſit aliis terminis exhiberi, numeris tamen nullatenus exprimi poſſit? ut & quòd ex hinc infert, veritatis expers videtur, univerſam nempe rationum doctrinam, Arithmeticæ potiùs quàm *Pag.* 226.

Geometricæ ſpeculationi convenire: quid enim, annon pleraque de rationibus adhuc inventa vel tradita planè generalia ſunt, & quantis ex æquo cunctis conveniunt? Et ejuſmodi ſaltem rationes, quæ numeris exprimi nequeunt, Arithmeticæ ſpeculationis limites egredientur, quales innumeræ ſunt, quibus elementi quinti theoremata non minùs quàm Arithmeticis adaptantur. Sed hoc ἐν παρόδῳ, neſcio num alias pleniùs elucidandum. Conſequenter ad hæc advertatur
3. tertiò, quòd nulla ratio ſeorſim & per ſe poteſt æſtimari vel comprehendi, nec per ullam determinatam quantitatem peculiariter apta nata eſt exprimi ſeu repræſentari, ſed per omnes, vel unamquamvis indifferenter; nec ideo cuivis abſolutæ quantitati ſubjacet, qualis enim illa quantitas foret, per omnia quantorum genera deſultans atque pererrans? Et ſi nullam ex ſe quantitatem intelligibilem habet, quomodo cum alia ratione collata deprehendetur habere? Quo pacto nullà ratione per ſe comprehenſibilium quantorum feliciter inſtituetur comparatio, notaque reſultabit relatio quantitatum ignotarum? Quinimo cum alia ratione collata ratio non niſi vagam & arbitrariam ſortitur quantitatem; prout enim commune conſequens ex arbitrio varium accipitur, ita rationum collatarum quæ dicuntur quantitates evariantur. Deſultoriam igitur & indeterminatam quantitatem habent, ſiquam habent, hæ rationes; hoc eſt, nullam. Eſt enim aliquid determinate, quicquid eſt; quod utique eſt, nuſquam eſt. Vidit hoc, & palam agnovit, luculentéque declaravit acutiſſimus

mus Vincentius, at ſeu verborum ambiguitate deluſus, ſeu ſpe novæ conſendæ ſcientiæ nonnihil elatus, aliorſum rapuit. *Reſpondeo* (inquit) *verum eſſe, ſi ratio quæ in numeris exprimi nequeat, ſolitariè ſumatur, denominatorem ejus exhiberi Geometricè non poſſe* (imò verò interpono, ſemper exhiberi poteſt, ſumendo quodvis quantum pro conſequente, quod eodem munere fungetur, quo communiter unitas defungitur in rationum effabilium denominatoribus exhibendis; neque rationum numeris effabilium quoad hoc peculiare quicquam eſt) *quòd ſi* (pergit Vincentius) *binæ vel plures fuerint datæ rationes, aſſignari poterunt ſingularum denominatores, qui nimirum demonſtrent qualis inter rationes ipſas proportio intercedat, atque hoc non tantùm à duabus cer is lineis præſtabitur, ſed à quibuſcunque aliis, quæ prioribus proportionales exiſtunt.* Sic ille. Cùm igitur præter hujuſmodi denominatores, nullæ poſſint aſſignari rationum quantitates, & ſi ſimpliciter accepti poſſint eſſe quamlibet varii, non erit ulla rationum abſolutè determinata quantitas. At Vincentius (ut dixi) verborum ut puto quorundam obſcuritate turbatus, aliò deflexit hæc. Quamobrem adverto quartò, quòd fundamentum unicum, cui innititur, e quo deducta videtur & enata de rationum quantitatibus & rationibus illa quam oppugnamus doctrina, eſt uſitatus iſte loquendi modus: hæ duæ magnitudines ſunt æquè inæquales, ac illæ duæ; hæ magis aut minùs inæquales ſunt quàm illæ, inde rationum quantitates & rationes colligunt dari. Si major eſt hæc ratio illa, ergo quantæ ſunt, ergò rationem 4.

hæc

hæc habet ad illam. *Ex quo* (inquit D. Hobbius) *intelligitur rationem tam excessûs quàm defectûs esse quantitatem* (esse quantam opinor vult dicere) *quippe quæ suscipit majus & minus* (intelligit. credo, quæ major dicitur & minor). Et Vincentius, in prima demonstratione libri de proportionalitatibus Geometricis, sic argumentatur: *Ratio est mutua quædam antecedentis ad consequens habitudo, secundùm excessum, & defectum, & æqualitatem. Cùm igitur unius rationis antecedens magìs excedat consequens, vel ab eodem magìs deficiat, quam alterius rationis antecedens suum excedat consequens, vel deficiat ab eodem, manifestum est unam rationem majorem minorémve esse alterâ, planè ut una quantitas alterâ major minórve est.* Sed ad hunc plausibilem discursum repono, quoad loquendi formulas usu receptas spectandum esse, non quid verba sonant, at quid loquentes intelligunt. Nihil autem aliud hujusmodi verbis concipi posse, satis declaratum est nuperrimè, quam ad communne consequens reductis quantorum quibuscunque rationibus, illarum antecedentes se taliter excedere, vel taliter deficere, vel sibimet exæquari. Nec enim, ut ipsi necesse habebunt fateri, possunt æstimari, vel inter se comparari rationes ullæ, nisi talis fiat reductio; postquam verò reducuntur, haud aliter quàm ex antecedentium collatione dignoscitur aut denominatur hæc, quam ipsi nominant, ratio. Quapropter & ex ipsorum mente ac usu vocantur antecedentes isti rationum denominatores. Ergo nihil est necesse per locutiones antedictas aliud quicquam præter antecedentium æqualitatem

aut

aut inæqualitatem (hoc eſt, ipſorum rationem) deſignari vel intelligi. Nec igitur valet ab hiſce loquendi formulis deducta argumentatio. Dixi nihil eſt neceſſe, ſed neque de facto quicquam aliud concipitur, unde quo coronidem imponam huic diſſertationi, adverto quintò, quicquid vulgò rationibus tribuitur, id vere tantùm & proprie rationum denominatoribus, hoc eſt, ipſarum ad idem conſequens redactarum antecedentibus convenire. Quam illis aſſignant quantitas, nihil eſt aliud quàm denominatorum quantitas & ratio; quum ipſas videri volunt addere vel ſubtrahere, non niſi denominatores iſtos addunt vel ſubtrahunt; ſed & cùm ipſas multiplicant vel componunt, partiunt aut reſolvunt, eadem res eſt. Liquebit hoc propoſitiones Vincentianas, egregio ſanè niſu contextas, attentiùs expendenti; quas quidem is univerſaliter proponit, & ſecundùm definitiones ac hypotheſes ſuas ritè demonſtrat, at ſi quis eas ſpeciatim veluti de numericis rationibus prolatas accipiat, ejus totam doctrinam huc recidere deprehendet, ut fractionum quaſi numeralium, aut quotientium diviſione compertorum, additio & ſubtractio, multiplicatio ac diviſio, quoadque proportionem comparatio, indagetur atque tradatur. Quod autem in Arithmeticis eſt numerica fractio, vel diviſionis quotiens, id in Geometria eſt denominator rationis cujuſpiam, hoc eſt magnitudo quæpiam ad homogeneam ſibi magnitudinem, unitatis loco habitam, ſic affecta, prout fractio vel quotiens numerica refertur ad unitatem. Quare nihil aliud proſequi videtur Vincentius, 5.

tius, quàm fractiones Arithmeticas, iísque reſpondentes rationum Geometricarum denominatores ; quibus congruentia quæque ſymptomata rationibus ipſis aſcribit. Sint e.g. duæ rationes numericæ 3 ad 5, & 7 ad 3 ; harum denominatores erunt fractiones $\frac{3}{5}$ & $\frac{7}{3}$ (quatenus $\frac{3}{5}$ ad 1, ita ſe habet ut 3 ad 5 ; & $\frac{7}{3}$.1 :: 7.3) vel reducendo dictas fractiones ad communem denominationem, erunt iſtarum rationum denominatores numeri fracti $\frac{9}{15}$ & $\frac{35}{15}$. Has igitur fractiones cum addiderit ſibimet, aut unam ab alia ſubduxerit ; cùm unam per alteram multiplicárit aut diviſerit. & cùm ipſarum proportionem exhibuerit, præ ſe fert ipſas dictas rationes addidiſſe vel ſubtraxiſſe, multiplicáſſe vel diviſiſſe, vel ipſarum rationem exhibuiſſe. Non igitur ille vir egregius tam novam circa proportiones ſcientiam condidiſſe, quod cenſet Tacquetus, at veterem ante perſpectam doctrinam alio modo, nec eo nimis appoſito, contexuiſſe, noviſque vocabulis enunciáſſe videtur ; quam tamen à ſe repertis complurибus theorematis inſigniter locupletavit. Commune verò quod diximus, eſt illi cum cæteris hanc de rationum rationibus & quantitatibus doctrinam amplexantibus, rationes ſcilicet, dum numeros attrectant, cum numericis fractionibus confundere, dum alias rationes conſiderant, tanquam ſuis denominatoribus eaſdem tractare. Quod nonnunquam apertè diſertiſque verbis faciunt, imprudenter eò delabentes, ſæpiùs autem verbis declinantes reipsà incurrunt. Notat hoc & ſæpè taxat Hobbius in antagoniſta ſuo, ſed nec ipſe modò ſibi conſtet immunis

ab

ab hac culpa; idem enim est rationem rationibus tribuere, ac rationes cum denominatoribus suis easdem reputare, vel saltem nihil & insignificanter loqui; hoc enim aut nihil planè quicquam concipiunt. At sufficiant hæc quadantenus exponendæ confirmandæque sententiæ nostræ, quòd scilicet rationes nullam propriè dictam quantitatem habent; neque quoad rationem inter se verè comparantur. Unde nonnulla consectaria deducuntur. Hinc primo clarè faciléque decidetur quæstio de rationum, quam appellat Euclides compositione συνθεσει, num rectiùs pro rationum additione sit habenda, vel pro ipsarum multiplicatione: nam è dictis quoad rem ipsam rationibus, utpote quantitatis expertibus, neutrum convenit, nec addi nec multiplicari; quoad verò loquendi modum, quia cùm communi dicuntur rationes, ipsarum denominatores multiplicantur, manifestum est rectius dici rationes multiplicari quàm addi. Sicut & cùm denominatorum unus alium dividit, rectiùs operatio talis dicetur rationis divisio quàm subtractio. Quamvis obtinuerit, ut illa prior operatio dicatur πρόσθεσις, hæc posterior autem * ἀφαίρεσις. Secundò, radicitùs hinc evellitur, aut planè decernitur controversia, quam agitant nonnulli quamque videtur † Mersennus excitasse; num ratio scilicet a qualitatis nihilum referat, aut exæquetur nihilo, ratio majoris æqualitatis attollatur supra nihilum, ratio minoris inæqualitatis infra nihilum deprimatur. Nam ex

1.

* *Apud Ptolemæum, lib. I. συν. & Theonem isthic.*

2.

† *In Præfat. ad Cogit. Physico-Mat.*

ex vero cùm nulla ratio quanta ſit, intercidit hujuſce quæſtionis fundamentalis hypotheſis, ipsáque ſimul collabitur & ruit. Aſt ex hypotheſi quòd denominatorum affectiones rationibus ſuis adjudicandæ ſunt, evidentiſſimè liquet etiam minoritatis & æqualitatis rationes ſupra nihilum aſſurgere. Semper enim minoris rationis denominator eſt aliquod quantum conſequente minus; adeóque in Arithmeticis pars vel fractio minor unitate. Æqualis verò rationis denominator conſequenti ſemper adæquatur, & unitate ſignatur in Arithmeticis. Nec amplius quid ad hujuſce quæſtionis deciſionem requiratur. Tertio, facillimè refelluntur hinc 3. quæcunque Meibomius, adverſus antiquos juxta ac recentiores Geometras, ſtylo certe nimiſquam inverecundo, diſputavit ac adſervit. Qualia ſunt, quòd ratio ſubmultipla ſit eadem rationi multiplæ, propter idem ab æqualitate διάστημα. Præterquam enim quòd non idem ſit διάστημα, nam longiſſimè diſtant defectus & exceſſus, differentia negativa ac poſitiva, ſatis liquebit haſce rationes ad commune conſequens exigendo (quod pro rationum collatione toties neceſſarium monuimus) ſubduplæ denominatorem minorem fore (quadruplâ ratione minorem) denominatore rationis duplæ. Sit puta commune conſequens 2, igitur antecedentes erunt 1 & 4, unde conſtat propoſitum. Item, cùm colligit rationes exceſſûs & defectûs inter ſe non poſſe comparari: nam æquè comparantur hæ, ac aliæ quævis, denominatorum interventu. Etiam, cùm ſolummodo rationem minorem auferendam ſtatuit è majore;

(re-

(rectiùs minorem per majorem dividi dixiſſet, ut præmonitum eſt) in eo liquidiſſimè fallitur: quid enim impedit minoris rationis denominatorem dividi per denominatorem majoris, ſeu Arithmetice ſeu Geometricè? Rurſus, cùm rationem alicujus ad majus, ſubinde majorem eſſe pronunciat ratione ejuſdem ad minus: ut rationem 4 ad 7, majorem eſſe ratione 4 ad 5; adeóque rationis majoris & minoris nomina pene ab omnibus hactenus Geometris uſurpata. Nam ejuſmodi rationes, 4 ad 7 & 4 ad 5, ad idem conſequens revocando, puta ſubrogando pro illis æquipollentes 20 ad 35 & 28 ad 35, liquet 20 minorem eſſe quàm 28, adeóque rationem 4 ad 7 majorem eſſe ratione 4 ad 5. Et univerſim hinc patet quòd & quare majores & minores appellamenta commodiſſimè ſunt à veteribus applicata; quia ſcilicet id quod rei ratio depoſcit, ab antecedentium poſt reductionem quantitatibus legitimè derivata ſunt, à quibus cùm ipſæ rationes indicantur, ac denominationem accipiunt, tum habent omnino quòd ullatenus comparari poſſunt aut comprehendi. Quamobrem & abunde perſpicuum eſt eundem virum nullâ validâ ratione fretum, definitiones Euclideas falli poſtulâſſe. Nam ſi ratio quævis aliâ major eſt, quod ipſe non diffitetur, (& ſi nulla propriè major ſit, quod ego ſentio, docendi tamen causà nil vetat, nec ego repugno quin aliqua major appelletur) ſi, inquam, aliqua major ſupponatur, ille major jure meritiſſimo dicetur, cujus denominator eſt major, & quæ talis ab Euclide nominatur, egregiéque definitione circumſcribitur, ac diſtinguitur

ab

ab aliis. Eadem facilitate difflantur, ut autumo, quæcunque vir ille communi Geometrarum sententiæ pugnantia suggessit animo
4. paradoxa. Neque demum molestiam nobis facesset ista tantopere jactata λογομαχία, circa rationem multiplam ac multiplicatam, duplam ac duplicatam, triplam & triplicatam, atque consimiles. Nam e traditis manifestè dilucescet rationem (v. g.) duplicatam, quæ dicitur minimè duplam esse rationis, quacum confertur. Ut ratio numeri 9 ad 1, non est dupla rationis 3 ad 1, quoniam existente jam communi rationum harum consequente, denominator unius 9, alterius denominatori 3 duplato non æquatur. Unde patet istiusmodi rationum multiplicationes ab alia causa nuncupari, posthac commodiùs expedienda. Id solum adjiciam, admisso, quod astruere conatus sum, rationes nullam ex se quantitatem habére, nulla quantitatis attributa sortiri nisi naturalia, quæque debent accepta referre denominatoribus suis, difficultates hujusmodi plerasque statim evanescere, dubia planè tolli vel facilè solvi, lites & rixas plerasque consopiri; quæ nimium haud aliunde quàm ex ambiguitate per falsam istam hypothesin introductâ videntur emersisse. Quamobrem haud abs re duxi quæstionem hanc tam suse sedulóque ventilare. Cæterùm quia vulgò solent rationes inter se comparari, verbóque tenus æquales, majores, minores haberi; nec scientiarum magistris deneganda videatur licentia, tales voces cudendi ac usurpandi (doctrinæ nempè clarioris & succinctioris gratiâ, modò de re constet, ac errorum occasio præcidatur. Nec enim

enim ego vulgares loquendi modos libenter improbo, ſed genuinos ipſorum ſenſus inveſtigo, nè verba rebus officiant, & per inanes ſonos illudatur veritati) hæc, inquam, cùm ita ſe habeant, & non abſque fundamento quodam atque causâ probabili, locutiones iſtæ pridem admiſſæ ſint, ac dudum invaluerint, quid per illas diſtinctè ſignificetur inquiremus. Quæ nempe ſint æquales, majores, minores rationes (hoc eſt, alio modo breviter nec inconcinnè, rationum comparationes iſtas efferendo, quid ſit analogia, quid hyperlogia (aut prologia) quid hypologia, quomodo definiri poſſint, & à ſe bene diſtingui, proximâ Lectione quæremus; quâ nulla fortaſſe ſubtilior aut gravior apud Mathematicos diſceptatur controverſia. Optimè (quantum res ipſa patitur, optimè) mihi videtur ab Euclide definitiones has eſſe conſtitutas, pleriſque jam ſecus videtur, cúmque nemo ferè non in hoc damnat & deſerit; an juſtis de cauſis & validis ſubnixi ratiociniis hoc fecerint, id examinatis & expenſis quæ dixero penes veſtrum erit judicium ſtatuere. Interim εὐπραγεῖτε.

LECT. VI.

IN præcedente Lectione ſatis aſtruxiſſe videmur rationibus ex ſe, verè propriéque loquendo, nullam quantitatem, nullam rationem competere, nec ideò propter aliquid ipſis inhærens, aut ex ſe conveniens unam alterius reſpectu majorem, minorem, æqualem prædicari; ſed ab abſolutis quantis ad ipſorum rationes hæc derivari attributa. Quia verò pridem invaluit uſus, ut rationes inter ſe ceu quanta abſoluta comparentur; & æqualis, majoris, minoris rationis nomina ſortiantur; & nos locutiones iſtas, interpoſitâ juſtâ cautione, non illibenter admittimus, id proximè ſequitur, ut quo certo ſigno vel indicio dignoſci queat, quando ratio una alteri æqualis eſt, quando major, quandóque minor dici debeat, hoc eſt, quomodo definiri poſſint & diſtingui ratio, major, minor, æqualis, diſpiciamus. Et quidem è dictis ſatis manifeſtè conſequi videtur, ſiquidem duæ rationes homogeneis terminis conſtantes, commune conſequens habeant, illas commodiſſimè definiri poſſe per antecedentium reſpectivam quantitatem, ut æquales nempe rationes dicantur, quarum antecedentes æquantur, & ratio major hæc illâ, cùm hujus antecedens illius antecedentem excedit; & minor hæc illâ, cùm hujus antecedens ab illius deficit antecedente. Verùm cùm id quod accidit plerumque, diverſi conſequentis rationes

ones

ones comparantur, adeóque deficit iſta conditio, liquet aliud indicium requiri, quo rationum iſtarum relatio dignoſcatur; indicium ſcilicet aliquod univerſale, ſufficiens determinandis quibuſcunque rationum habitudinibus inter ſe. Tale verò ſufficiens indicium reperire, magnæ res difficultatis hactenus viſa compertáque eſt; cùm obſtent variæ cauſæ, duæ præſertim diſcrimen inter rationes effabiles & ineffabiles (hoc eſt, quantorum aſymmetria) & terminorum, quibus diverſæ conſtant rationes, ἑτερογένεια. Si rationes enim omnes effabiles eſſent, & inter quantitates tantummodo ſymmetras verſarentur, eodem modo definiri poſſet æqualis ratio, quo numerorum proportionalitas in elemento ſeptimo, per diviſionum nempe quotas æquales; & major minórque ratio per quotorum inæqualitatem reſpectivè: ſed hoc univerſim ſufficere prohibet terminorum, quibus inſunt pleræque rationes, incommenſurabilitas, quo fit ut exquiſitè peragi nequeat diviſio, neque per numeros vulgò notos exprimi poſſit, aut animo clarè concipi modus, quo rationum termini ſeſe reſpiciunt. Terminorum etiam, quibus inſunt aut conſtant comparatæ rationes, ἑτερογένεια modos alios nonnullos (excogitabiles aut etiamnum excogitatos) excludit, quibus alioqui rationum reſpectus univerſaliter utcunque definiri poſſit, ut poſtea forſan oſtendetur. Hinc perdifficile videtur univerſale quoddam indicium exhibere, quo propoſitis duabus rationibus, quarum termini ſint indifferenter ſymmetri vel aſymmetri, homogenei vel heterogenei, de ipſarum æqualita-

te vel inæqualitate liquidò pronuncietur & certò. Videamus igitur quæ talia indicia Geometræ conati sunt assignare, vel quo pacto rationum hosce respectus definiendos censuerunt. Et quia si deprehendi posset apta rationis æqualis definitio, non difficile sit ex illa rationum inæqualium, majoris ac minoris, definitiones efformare, de rationum æqualitate primò differemus; quæ scilicet anima Matheseôs & nucleus habetur, imò disciplinarum omnium vinculum (Δεσμὸς τῶν Μαθημάτων) à Platone dicitur. Rem itaque tantam velut ex imo fundamento pertractandam ordiemur. Rationis æqualitas unico vocabulo (brevitatis & claritatis causâ) vocitari solet analogia. Quæ vox extra Mathesin vulgò quamvis denotat congruentiam, conformitatem, aut aptam rerum inter se quarumvis correspondentiam; sicut (instando) convenientia sermonis cum regula generali dicitur à Grammaticis analogia; & quæ in ratione quapiam communi conspirant, à Logicis dicuntur analoga. Nempe Græcis ἀνὰ præpositio rerum identitatem, æqualitatem, aut convenientiam innuit qualemcunque. Exempla suggerunt Scripturæ sacræ; Joannis secundo habetur, Ἀνὰ μέτρητὰς δύο χωροῦσαι ὑδρίαι· Hydriæ binas metretas capientes æqualiter, aut singulæ binas. Matthæi vigesimo, operarii loco mercedis, Ἀνὰ δηνάριον ἔλαβον· Unusquisque denarium pariter accepêre. Lucæ nono, Κλαναπέσατε αὐτοὺς ἀνὰ πεντήκοντα· Facite discumbant quinquaginta simul, vel in singulo discubitu æquè quinquageni. Neque non apud medicorum filios in pharmacorum

In Timæo.

macorum compoſitione præſcribi, Sumantur horum vel illorum tot taléſque menſuræ ana, hoc eſt, æquè, vel ſingillatim tantæ, ignotum nemini. Simili fere pacto ἀνάλογον dicuntur bina quanta binis collata, quæ λόγον habent ἀνὰ congruè vel æqualiter; hoc eſt, quæ rationem habent æqualem: abſtractéque rationum ipſarum convenientia talis appellatur ἀναλογία. Latinis eadem uſitatiùs proportionalitas dicitur, diſtinctionis gratiâ, quia proportio ſæpiùs ipſam rationem τὸ λόγον deſignat Quanquam, ut mihi prænonitum, Cicero cùm in Plat. Timæi verſione vocem ἀναλογίαν in Lat. transfunderet ſermonem, adhibuerit vocabulo proportio. Fabius autem Quintil. ἀναλογίαν per ſimili- *Quintil. lib. V. H.*
tudinem bene cenſuit exprimi: quapropter analogia vel proportionalitas definitur ab Euclide λόγων ὁμοιότης, à Theone Smyrnæo λόγων ταυτότης· melius (etſi non admodum referat) meâ ſententiâ diceretur λόγων ἰσότης (cùm quia ſimilitudo verbum eſt laxiùs & magis ambiguum; & identitas haud optimè quadrat rebus actu diverſis, immediatè quà talibus & ſub diverſorum ratione comparatis; tum quia rationum habitudines aliæ, hyperlogia nimirum & hypologia, non ex diſſimilitudine vel diverſitate, ſed ex inæqualitate denominantur majoritas & minoritas; quia denique rationum æqualium denominatores, à quibus, ut expoſitum, rationes habent quòd ullatenus inter ſe comparantur, non iidem aut ſimiles, ſed æquales ſunt) definitiones autem illæ non ſunt ὀσωδεῖς, rei definitæ certam aliquam eſſentialem paſſionem exhibentes, ſed tantùm ὀνοματωδεῖς,

πωδεῖς, quid analogiæ nomen ſignificet quadantenus indicantes; Euclidi ſaltem tales ſunt, ut ex eo ſatis patet, quòd definitioni quintæ (rationem ſcilicet eandem habentium magnitudinum definitioni) ſubjicit, Τὰ δὲ αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον ἀνάλογον καλείσθω, quæ mera eſt vocabuli ἀνάλογον explicatio. Mox autem, interjectis ſolùm inæqualem rationem habentium definitionibus, Ἀναλογία δέ ἐστι λόγων ὁμοιότης. Quamobrem Euclidis mentem haud optimè capit Borellus, cùm exiſtimat eum hanc velut eſſentialem, & ſcientificam analogiæ definitionem proponere; cúmque cenſet ex Euclidis mente, rationum ſimilitudinem ceu notam & primam analogiæ proprietatem aſſignari. Nil tale cogitáſſe videtur is; at cùm ſubinde vox analogiæ, vel ἀνάλογον εἶναι, rationis æqualitatem concinniùs exprimens & conciſiùs, interdum uſurpanda videretur, eam nè quid ignorata diſcentibus faceſſeret negotii, vel caliginis effunderet, explicatam voluit dare. Quare nec Euclidem meritò taxat (taxat, inquam, ex hypotheſi quòd Euclides iſtam definitionem tradiderit) quaſi ſuperfluè, pravéque binas ejuſdem rei definitiones exhibentem. Nam eandem vel æqualem rationem habentium unicam exhibuit revera definitionem generalem, per eſſentialem quandam ipſorum paſſionem; quin autem præterea rationem habentia æqualem appellari ἀνάλογον & rationum identitatem vel ſimilitudinem iſtam analogiæ quoque nomine deſignari ſubmoneret, quid obſecro juſtæ cauſæ debuit impedire? Imò ſatis habuit cauſæ vim declarare vocabuli, pleriſque for-

forſan ignoti. Fraudi verò fuiſſe videtur eruditiſſimo viro, quòd in Claviana, aliiſque Latinis pleriſque elementorum editionibus analogiæ deſcriptio loco ſuo legitur emota; & anteriùs protruſa quartum iſthic locum occupat, quæ jure meritóque Græcis in codicibus octava numeratur. Itaque rectiſſimè ſuboluit naſutiſſimo viro, deſcriptionem iſtam loco quem obſidet inferctam temerè; neque forſan in ſuum ordinem repoſitam ità ſugillàſſet. Quanquam præterea non diffiteor elementi quinti definitiones attentiùs inſpectanti, nonnihil in iis exſcriptorum culpâ videri tranſpoſitum ac immutatum; qua de re non eſt opportunum conjecturas proferre. Quia eò potiùs accingimur, ut quod in hac materia præcipuum eſt æqualis rationis vel analogiæ definitionem exploremus appoſitam & accuratam. Id quod exequemur hâc methodo: Primò, definitionem Euclideam explicatam dabimus; neque non ei legitimæ definitionis conditiones ad amuſſim quadrare monſtrabimus. Secundò, quæ contra definitionem iſtam adferuntur objectiones adnotabimus & diluemus. Tertio, novas huic definitioni ſubrogantium doctrinas & methodos excutiemus; & quid in iis deſideretur ac deficiat, quouſque cedant Euclideæ definitioni, vel quatenus eâ deteriores ſunt, adnitemur oſtendere. Quod primum caput attinet, elementaris definitio ſic Græcè ſonat; Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν

σμὸν ἑκάτερον ἑκατέρῳ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα καταλλήλως. Hoc est, reddente Clavio; in eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam & tertia ad quartam, cùm primæ & tertiæ æquemultiplicia à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si ea sumantur quæ inter se respondent (vel si ordine sumantur, hoc est, ut multiplex antecedentis primi cum sui consequentis multiplice, & multiplex secundi antecedentis cum sui consequentis multiplice conferantur). Talis est proportionum definitio Euclidea; μορμολυκεῖον illud, quo plerunque deterrentur ingenia virorum modesta vel ignava: modesta, quæ simul ac difficultatis aliqua species objectatur, suis diffidunt ipsorum viribus; ignava verò, quæ fermè nolunt attentionis aliquid ediscendis scientiis impendere; quasi nobis in hac rerum obscuritate constitutis sapere liceret ἀπροδεῖ. Quorum utrique monendi sunt, illi nè planè despondeant animo, hi nè tantillum curæ refugiant, quando studium res aliquod, at non improbum, desideret. Cæterum verbis aliis concipi poterit hæc definitio, breviùs aliquantum, & forsan ad quorundam captum accommodatiùs. Proportionalia quanta sunt, bina binis, quum antecedentium æquè multipla quælibet consequentium æquè multiplis quibuscunque sunt, unà semper vel æqualia, vel majora, vel minora, ordinatè. Vel sic; analoga quanta (vel analogica, nos brevitatis causâ subinde dicemus ana-

analoga) cùm antecedentia quomodocunque pariter multiplicata, versùs conſequentia pariter itidem utcunque multiplicata perpetuò conſervant iidem genus rationis (hoc eſt, ſimul exceſſum, defectum, aut æqualitatem). Pariter multiplicata dixi versùs pariter multiplicata, ſed obiter adnoto dici potuiſſe, pariter diviſa versùs pariter diviſa; hoc eſt, pro æquè multiplis accipi potuiſſe partes ſimiles aliquotas; ſcilicet ut talis emergeret definitio, conſonans Euclideæ. Analoga quanta ſunt, cùm antecedentium ſimiles quælibet aliquotæ partes conſequentium quibuſvis aliquotis partibus ſemper unà majores, vel æquales, vel minores ſunt. Vel, cùm antecedentia pariter utcunque diviſa cum conſequentibus, utcunque pariter diviſis, idem rationis genus unà retinent. Potuiſſent & hæc in eadem definitione copulari, ſic ut ea tam æquè multipla, quàm ſimiles partes ſub disjunctione contineret, hoc modo; proportionalia quanta ſunt, cùm antecedentia pariter utcunque multiplicata vel diviſa, conſequentibus utcunque pariter multiplicatis aut diviſis, &c. Horum utrovis modo potuiſſet, inquam, ὁ στοιχειωτὴς æquâ ratione quod rem ipſam ſpectat, proportionalium definitionem effinxiſſe. Sed quia diviſio multiplicatione nonnihil impeditior videtur, & ſimplicior, conceptúque facilior eſt integrorum quàm fractorum calculus, & paucioribus expeditur, æquimultiplicia potiùs quàm ſimiles partes, conſultò ſelegiſſe videtur & adhibuiſſe. Cæterùm ut hoc modo proportionalitatem declararet, in cauſa fuit, quòd cùm generalem inveſtigaret de-

definitionem, tam earum æqualium rationum quæ ſymmetris terminis conſtant, quàm illarum quarum termini forent aſymmetri, ipſæque proinde non effabiles; cúmque rationum ineffabilium antecedentes explicabili modo conſequentes ſuos reſpicerent, ſic ut immediatè quomodo continerent ipſos, vel in ipſis continerentur, vix concipi poſſet; non eapropter à continendi modo (per quem effabilium rationum æqualitatem facilè definiviſſet, & actu quidem in elemento ſeptimo definivit) ſed aliunde peti debuit univerſale quoddam ſymptoma rationum pariter omnium, effabilium & ineffabilium, æqualitati connexum, eíque determinandæ ſufficiens; quale dum expiſcaretur, omnia perluſtrans animo tandem advertit, opinor, aliqua quanta cum aliis vel ex naturæ ſuæ ſpeciali quadam proprietate, vel ob adſumptam quandam conditionem ita combinari, connectíque inter ſe (vel ab alteris altera, quoad ſuæ quantitatis modum ita dependere) ut cùm univerſaliter ab illorum æqualitate vel inæqualitate, conſequenter horum æqualitas vel inæqualitas ejuſdem generis ſimultanea, tum etiam illorum ſimilia quævis augmenta vel decrementa, prorſus arguerent & ſecum traherent neceſſariò ſimilia horum incrementa vel decrementa. E.g. duo quævis æque alta triangula naturæ ſuæ ſpeciali proprietate quadam in elemento primo demonſtratâ, cum baſibus ſuis ita connectuntur, ut ipſorum priori modo quolibet aucto vel multiplicato, baſis etiam ſua ſimiliter augeatur aut multiplicetur: neque non prout adaugetur aut multiplicatur poſterius, ita ſimili-

ter

ter accreſcit & multiplex evadit ejus baſis: itémque ſi prius augmentum vel multiplex poſteriore majus ſit, una baſis ei reſpondens alterius augmenti vel multipli baſe major erit; ſi minus illud, hæc minor; ſi illud æquale, hæc etiam æqualis. Rurſus, duo quævis tota, cum ſimilibus ſuis partibus aliquotis, propter adſumptam iſtam ſimilitudinis conditionem, ita connectuntur, ut illorum quælibet multiplicationes includant & ſecum deferant harum conſimiles multiplicationes reſpectivè, neque non ſi prioris totius multiplex excedat poſterioris multiplum, etiam partium prioris multiplex unà ſuperabit partium poſterioris multiplum; ſi deficiat illud, hoc deficiet; ſi adæquetur illud, hoc etiam neceſſariò adæquabitur. Hæc cùm adverteret auctor, etiámque porrò deprehenderet, in aliis aliter affectis quantis ſecus evenire, verbi gratiâ, ſicut poſthac oſtendemus, in triangulis differenter altis, neutiquam ex unius cum baſe ſua pariter multiplicati exceſſu, ſuper alterius multiplum infertur baſis ſuæ exceſſus ſupra baſim alterius, cum altero pariter multiplicatam: neque ſi tòta cum diſſimilibus ipſorum partibus comparentur, inde quòd prius æquè cum ſuis partibus multiplicatum excedat poſterioris multiplex aliquod, ullatenus conſequetur ideo partium prioris multiplum excedere partes poſterioris æquè cum ſuo toto multiplicatas. Hæc, inquam denuò, cùm obſervaret Euclides (ſeu quis alter harum definitionum conditor) & proprietatem iſtam antedictam omnigenis promiſcuè quantis, ſymmetris & aſymmetris, convenire (nulla ſiquidem

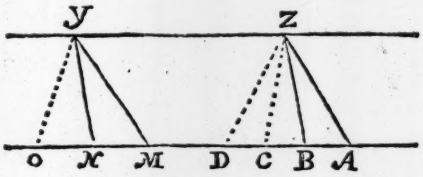
dem illic ſymmetriæ vel aſymmetriæ cujuſvis intervenit conſideratio) hinc ex illa rationum taliter affectis quantis accidentium mutuos ad ſe reſpectus generatim æſtimandos cenſuit ac definiendos. Arbitratur Clavius auctorem cùm primò perſpexiſſet hoc ſymptoma ſymmetris quibuſcunque proportionalibus accidere, tum nonnullis etiam aſymmetris quatuor quantis aliquando convenire, inde jure ſuo uſum proportionalitatem ex illo generaliter determinandam cenſuiſſe. Mihi potiùs videtur, quando nedum id effabili ratione præditis analogis (juxta definitionem aliquam priorem ità denominatis) ſed univerſim omnibus ità, ſicut innui, per naturæ ſuæ proprietatem ſpecialem, aut per adſumptam conditionem in ſe connexis bis duobus quantis id comperiſſet accidere, per ipſum habitudines rationum ejus modi quantis competentium ab aliis exiſtimâſſe diſtinguendas; quas meritò quidem eaſdem vel æquales dixit, quoniam ſi quando contingeret ejuſmodi rationes idem conſequens habere, vel ad idem utcunque conſequens revocari poſſe, ſemper ipſarum antecedentes adæquarentur. Sed ita forſan auctor hujuſce definitionis ratiocinari potuit, & ſecum animo verſare: è confuſa proportionalitatis idæa, quatenus illa rationum ſummam præ ſe fert ſimilitudinem, perſpicitur antecedentes eodem genere rationis ſimul ad conſequentes referri. Quod ſi multiplicentur antecedentes per eundem quemlibet numerum, ſatis adparet hanc ſimilitudinem, quoad rationis genus neutiquam immutari, quum hi termini ſimiliter adcreſcant. Sin

&

& præterea per eundem quemvis numerum conſequentes etiam multiplicentur, adhuc perdurabit eadem ſimilitudo, retinebitur idem utrinque rationis genus; quamvis prout numeri multiplicantes adſumuntur majores aut minores, ipſæ ſingulares rationum ſic immutatarum quantitates innumeris modis variantur, augentur, & minuuntur, ſic ut ſubinde termini antecedentes conſequentibus æquentur, ſubinde deficiant ab illis, vel illos exſuperent magis minúſve. Hujuſmodi fortaſſe diſcurſu nonnihil Metaphyſico, neque tamen admodum obſcuro, vir ſagaciſſimus ad hujuſce rei fundum penetravit, & inde definitionem nobis hanc extraxit. Verùm quocunque modo, quacunque ansâ arreptâ, devenerit auctor ad hujus ſymptomatis notitiam, ejus ſaltem ut ſubtiliſſima fuit inventio, ſic uſus eſt præclarus, & perquam opportunus propoſitæ materiæ; ſiquidem ex eo immediatiſſimè, directiſſimè, breviſſimè, clariſſiméque præcipuas pleraſque generales proportionalium paſſiones deduxit, ut & ſpecialium quantorum proportionalitates indicavit: id quod deinceps oſtenſuri ſumus. Sed præmiſſam definitionem primùm explicemus: Imprimis & præſertim notabilis eſt appoſita conditio generalis, Καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν· ſecundum quamcunque multiplicationem, nec enim ſufficit ut aliquando contingat homologorum terminorum æquè multiplicia ſic affici (nimirùm ut unà excedant, deficiant, aut æquentur) ſed argumentis manifeſtis evinci debet hoc ſemper eventurum. Debet, inquam, evinci non ex inductione quapiam perpetua (inductio

res

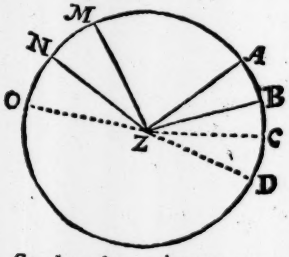
res eſt infiniti negotii, quámque Matheſis omnino reſpuit) aſt univerſali demonſtratione derivatâ, ex ſpecialium quantorum proprietate aliqua eſſentiali, vel fundatâ in magìs univerſalium quantorum peculiari quadam conditione ſuppoſità vel compertà. Accidere poteſt in aliquo caſu ſimultaneus ille defectus, exceſſus, aut æqualitas, etiam quantis minimè proportionalibus, aſt ſolis proportionalibus univerſaliter convenit, & ex ipſorum conſtitutione neceſſariò fluit; adeóque poteſt & debet de iis univerſaliter demonſtrari, quo conſtet proportionalitas ipſorum, & hanc eis definitionem congruere. Verùm non aliter meliùs illuſtretur hæc definitio, quàm exempla præponendo, quibus evidentiſſimè diluceſcat hanc conditionem multis revera quantis competere, quódque poterit hæc definitio facili negotio rebus applicari; quòd ad intellectum minimè difficilis, ad uſum ſatis prompta ſit. Ordiemur ab exemplis ſpecialioribus.



Sint duo triangùla ZAB, YMN æquè alta (vel inter eaſdem parallelas conſtituta) ſuper baſes AB, MN. Habentur itaque bis duo quanta; duo nempe trigona ZAB, YMN & duæ baſes AB, MN; quibus aſſero definitionis noſtræ conditionem accidere. Nam utcunque pro lubitu æquè multiplicentur ante-

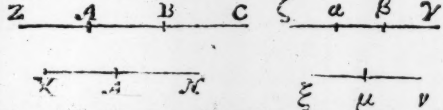
cedentes

cedentes termini. triangulum ZAB ejúſque baſis AB, juxta numerum puta ternarium, adſumendo rectas BC, CD æquales ipſi AB, ducendóque rectas ZC, ZD (liquet enim ob æqualitatem baſium AB, BC, CD etiam triangula ZAB, ZBC, ZCD æquari). Item ad arbitrium æquemultiplicentur conſequentes, triangulum YMN, ejúſque baſis MN, puta per binarium accipiendo rectam NC = MN, & connectendo rectam YO. Jam ex demonſtratis in elemento primo planiſſimè liquet, quòd ſi antecedentis trianguli triplex ZAD ſuperet conſequentis trianguli duplex YMO, etiam antecedentis baſis tripla AD ſuperabit conſequentis baſis duplam MO; ſi defectus ſit iſthic, etiam hîc defectus erit; ſi iſthic æqualitas, etiam & hîc æqualitas reperietur. Ergo quatuor hæc quanta conditionem obtinent in hac definitione requiſitam; nec id ex inductione quapiam, aſt ex univerſali diſcurſu adſtruitur.



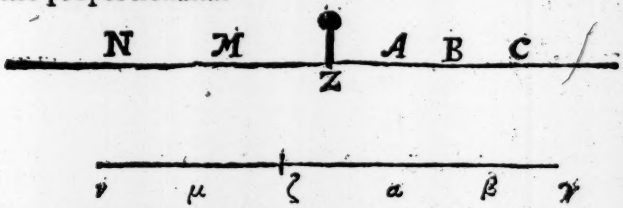
Rurſus, ſit circulus cujus centrum Z, & ad centrum anguli duo AZB. MZN, inſiſtentes arcubus AB, MN: oſtendendum eſt definitionis hujuſce conditionem etiam iſtis convenire angulis & arcubus. Sumatur arcûs AB quomodocunque multiplus, puta triplus, AD;

AD; & connectatur ZD. Liquet ex elemento tertio, angulum AZD etiam triplum esse anguli AZB. Tum arcûs MN quilibet accipiatur multiplus, pone duplus MO, & connectatur ZO. Itidem liquet angulum MZO anguli MZN duplum esse. Quod si angulus AZD superet angulum MZO, etiam (è demonstratis in elemento tertio) arcus AD arcum MO excedet ; si is illum adæquet, etiam hic adæquabit hunc ; sin defectus isthic fuerit, etiam unà defectus hîc erit. Ergò quatuor hisce quantis dicta conditio per demonstrationem quandam universalem ostenditur convenire. Porrò, (nam exempla libenter huic penitius enucleandæ rei multigena congeram)



Sint duo spatia ZA, XM, ab uniformiter lato mobili cum æquali velocitate percursa diversis temporibus, repræsentatis à lineis $\zeta\alpha$, $\xi\mu$. Conveniet dico spatiis istis ac temporibus memorata conditio ; Assumantur enim quotcunque spatia AB, BC ipsi ZA æqualia, & totidem tempora $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ ipsi $\zeta\alpha$ æqualia. Quin & XN æquè multiplex sit spatii XM, ac tempus $\xi\nu$ temporis $\xi\mu$. Liquet $\zeta\gamma$ esse tempus lationis per ZC, & $\xi\nu$ esse tempus lationis per XN (ex definitione scilicet motûs uniformis, juxta quem temporibus quibuscunque æqualibus peracta spatia æquantur ; & vicissim æquantur tempora, quibus æqualia conficiuntur spatia). Item, ob æqualem ex hypothesi velocitatem, si spa-

ſpatium ZC majus ſit, minus, vel æquale ſpatio XN, erit eodem ordine reſpective tempus ζγ majus, minus, vel æquale erit reſpectu temporis ξν. Unde liquet hæc quatuor quanta habere ſe juxta conditionem in definitione noſtra præſtitutam. Iterum, ſi adſumatur, id quod rationi ſimul ac experientiæ conſentaneum eſt, momenta ſeu vires motivas ponderum, pro diſtantiarum à centro libræ modo ſic adaugeri vel imminui, ut æqualia diſtantiarum incrementa vel decrementa ponderibus iiſdem, æqualia momenta ſuperaddant aut detrahant, hinc oſtendetur juxta definitionis hujuſce ſententiam momenta ponderum æqualium diſtantiis ſuis eſſe proportionalia.



Ut ſi punctum Z ſit centrum libræ, cui ad intervalla ZA, ZM appendantur æqualia pondera, rectæque ζα, ζμ repræſentent ipſorum momenta, juxta dictas diſtantias; acceptis ipſorum ZA, ζα quibuſvis æquemultiplis ZC, ζγ; liquet e ſuppoſitione modo præſtratâ ζγ eſſe momentum ponderis appenſi ad diſtantiam C. Et ſimiliter acceptis ZN, ζν æquemultiplicibus ≒ ZM, ζμ; liquet ζν æquari momento ponderis ejuſdem ad N ſuſpenſi. Quòd ſi ZC excedat, vel adæquet, vel deficiat reſpectu ≒ ZN; etiam unà correſpondenter momentum ζγ excedet, vel

æquabit, vel deficiat respectu τῶ ζ. Ergò quanta ZA, ZM proportionalia sunt ipsis ζα, ζμ, juxta definitionem Euclideam. Consimili pacto specialibus quibuscunque materiis adaptari poterit hæc definitio, sic ut postquam è propositorum quantorum proprietate quapiam elicita fuerit hæc conditio, per eam ipsorum proportionalitas demonstretur. Sed & exempla plura suggeri possent universalium, hoc est, ad nullam quantitatis speciem restrictorum quantorum, quibus ob adnexam conditionem aliquam accommodetur hæc definitio. Veluti si bina quævis æqualia quanta sumantur A, B, aliaque quævis sibimet æqualia C, D: demonstrabitur A, B ipsis C, D esse proportionalia. Nam ex ista utrinque supposita æqualitatis conditione facilè deducetur iis hoc symptoma convenire. Hujusmodi totum ferè quintum elementum exemplis constat; nec aliud isthic agitur, quàm ut hæc proprietas ostendatur congruere quantis omnibus certâ conditione præditis, & inde proportionalitatis nomen iis deberi. Quapropter ejusmodi pluribus adducendis exemplis non immorabor. Unicum duntaxat adjiciam, à quo fermè constet universaliter ex hac definitione pleraque ab aliis subrogatas definitiones (hoc est, proprietates, à quibus alii quantorum definiunt analogiam) deduci demonstrarique posse. Sint quæcunque bis duo quanta A, B & C, D juxta definitionem hanc nostram proportionalia, scilicet ut sit ratio A ad B, æqualis rationi C ad D. Dico, consequi quantum A divisum per B adæquari quanto C diviso per D (hoc est, iis com-

competere paſſionem iſtam ex qua Euclides in Elem. VII. commenſurabilium quantorum analogias definivit, pérque quam non nemo cenſet etiam aſymmetrorum proportionalitatem utcunque poſſe non incommodè definiri. Quandoquidem nimirum etſi v.g. poſitis A,B aſymmetris, non poſſit A per B ſic dividi, ut quotiens emergat rationalis vel effabilis, attamen aliquis revera talis quotiens confuſo modo poſſit intelligi ſubeſſe; qui differat ab aſſignabili rationali quotiente (tam quoad exceſſum quàm quoad defectum) minori quàm aſſignatà quavis quantulacunque quantitate. Nec ideo repugnamus, quin ſupponatur etiam aſymmetrorum quantorum diviſio qualiſcunq; ; quotiénſq; diſtinctè non effabilis concipiatur dari: quinimo libenter hoc ſuſcipimus, ut eò magis univerſalitas conſtet ſubſequentis ratiocinii. Hiſce ſubnotatis, præmiſſam hypotheſin repetens dico, ſi juxta definitionem noſtram ſit A.B:: C.D, erit $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$. Si neges, eſto exceſſus penes alterutram partem, puta ſit $\frac{A+X}{B}=\frac{C}{D}$. Multiplicetur X per aliquem numerum M, donec MX excedat B (quod fieri poteſt ex axiomate clariſſimo, quod aſſumunt cum Archimede Geometræ: quodlibet quantum toties accipi poteſt, ut ejus multiplex aliquoties acceptum excedere poſſit quodvis aſſignatum ejuſdem generis quantum) igitur liquet B multiplicari poſſe per aliquem numerum N, ut NB non ſuperetur ab MA, ſed ſuperetur ab MA+MX (quoniam

am MX majus est uno B). Quoniam verò $\frac{A+X}{B}=\frac{C}{D}$ ex hypothesi tua) utramque partem æquationis multiplicando per eundem numerum M, erit $\frac{MA+MX}{B}=\frac{MC}{D}$; item rursus dividendo partes hujus æquationis per eundem numerum N, erit $\frac{MA+MX}{NB}=\frac{MC}{ND}$. Itaque quoniam ostensum est MA+MX□NB, erit MC□ND (quum enim duæ fractiones æquantur, si numerator unius excedat ipsius denominatorem, etiam alterius numerator suum denominatorem exsuperabit, aliàs inæquales forent contra hypothesin, una major, altera minor unitate) quum igitur ostensum sit esse MC□ND, sed non esse MA□NB, liquet non esse juxta nostram definitionem A.B :: C.D ; quod primæ repugnat hypothesi. Perperam igitur negavit adversarius quantum A divisum per B æquari quanto C diviso per D. Quod erat demonstrandum. Jam verò tandem è tot hisce prolatis exemplis

1. evidenter patet, Primò, quòd hæc definitio nititur hypothesi clarè possibili, quæ scilicet innumeris exemplis commonstretur, haud absque fundamento confingi, sed actu rebus esse ; seu quòd hujus definitionis conditio

2. multis quantis revera congruit Secundò, quòd proprietas hæc ita generaliter extenditur, ut ei nihil obstent quantorum asymmetria nec ἑτερογένεια· cùm nec istæ, nec iis oppositæ symmetria & ὁμογένεια, omnino in

ejus

ejus applicatione considerentur. Tertiò, 3.
quòd hæc proprietas necessariò fluit ex natura, vel intime conjungitur cum specifica conditione quantorum quibus attribuitur, adeóque minimè removetur ab ipsorum quà proportionalium essentia. Semper enim ostenditur competere quantis propositis per ipsorum, ut taliter conditionatorū, definitiones, aut per proprietates aliquas præcipuas & essentiales. Quarto, quòd hæc definitio 4.
sterilis non est, nec inutilis, at conclusionum circa materias tam generales quàm speciales fœcunda mater. Ex ea siquidem totum Elem. V. & quicquid suspiam in elementis Geometricis circa proportionalitates ostensum est, derivatur ac dependet. Addo quin- 5.
tò, quòd neque μογοστόκος est, cum molestia vel tædio pariens, at conclusiones quamplurimas admodum facili nixu prodit in lucem. Nam immediatè, directóque discursu, nullis ambagibus, quantorum ab illa proportionalitates primæ ac præcipuæ, eliciuntur & demonstrantur. Sextò, quòd ex hac definiti- 6.
one satis facilè deducantur cùm affectiones istæ, à quibus alii definitiones suas extruunt, tum reliquæ proportionalium passiones, quas è suis ii definitionibus eliciunt; adeóque rursus quòd hæc proprietas cum proportionalitatis natura perquam intimè copulatur. Ad- 7.
jicio, propter inductionis calumniam, nusquam hîc ullam inductionem comparere, sed universalibus omnino proportionibus constare, qui adhibetur, discursum, & ex universalibus principiis dimanare. Neque video qui tot ad exempla tam luculenta mediocriter attenderit, cur Euclideæ definitionis

hypotheſi nè dum incomprehenſibilitatem quandam, at vel obſcuritatem ullam aut difficultatem exprobret meritò. Niſi quòd omnes omnium rerum notitiæ quatenus attentionem expoſcunt, eatenus difficiles videantur humanæ mentis faſtidioſæ ſocordiæ. Commune nobis hoc vitiúmne dicam, an ſymptoma quòd immunes omnis curæ degere, nullóque præſertim cum negotio ſapere cupiamus. Quid verò tandem hiſce perſpectis & rite perpenſis impedit, quin utcunque reclamantibus Neotericis Doctoribus audacter pronuncienus Euclideæ huic definitioni definitionis cum primis optimæ notam ac titulum convenire? Quando nempe definitionis optimæ potiſſimis, quas ego quidem experientiâ duce comperio, vel aſtipulante poſſum agnoſcere ratione, legibus apprimè conſonet. Cùm ſcilicet hypotheſi nitatur clariſſimè poſſibili; cùm ſubjectum ſuum diſtinguat ab aliis omnibus; cùm ejus ut talis paſſionem exhibeat neceſſariam, eſſentialem, reciprocam; cùm ex ea aliæ paſſiones elici poſſint: adeóque ſit utilis concluſionibus aſſruendis, & procreandæ ſcientiæ; cùm denique facilè, clarè, directè rebus applicari poſſit, & ad uſum transferri; præter quas vix alias mihi bonæ definitionis leges, conditiones, virtutes hactenus licuit obſervare; quæ cùm noſtræ conveniant, optimam aſſerere non dubito. Quod luculentiùs apparebit ex telorum depulſione, quibuſcum inſensè petunt adverſarii, quæ certè tam denſo nimbo volitant, adeò validâ vi contorquentur, iis ut excipiendis haud ſufficiat præſens Lectio, proximâ tentabimus.

LECT.

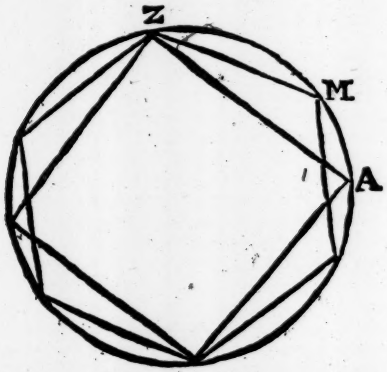
LECT. VII.

IN proximè diſſertatis Euclideam proportionalium definitionem utcunque conati ſumus exponere, neque non argumentis quibuſdam κατὰ ζητησιν aſſerere. Quia verò plerique recentiores eam vehementer impugnant, aut planè rejiciunt (perpauci quidem ſimpliciter ut falſam propoſitionem, plures ut pravam definitionem) ſupereſt ut quas ei dicas impegerint excutiam. Imprimis omnium peſſimè Ramus eam accepit, acerbiſſimáque perſtrinxit ſententiâ: ſic tamen ut planiſſimè monſtret ſe temerè, nec intellectâ penitùs causà pronunciâſſe. Primò, valde lubricam dicit & falſam: quæ profectò mera calumnia eſt, nec aliunde quàm ab errore ſpiſſiſſimo nata; quia nempe quid ſit per quamcunque multiplicationem ſimul excedere, deficere, æquari minùs rectè percepit. Diſertiſſimè requirit Euclides ad proportionalitatis indicium, ut exceſsûs, defectûs, æqualitatis de homologorum terminorum æquè multiplis omnimoda ſimultaneitas & perpetua comprobetur: hic quia quanta non-proportionalia, ſubinde quaſdam ejuſmodi ſimultaneitates obtinere contingit, Euclideam enunciationem lubrici falſique poſtulat: quid iniquius aut infirmius? Si quis, ut è vulgari materia ſimile quid depromam, virum probum definiret aut deſcriberet, iſtiuſmodi virum, qui ad rectæ ra- Schol. 1.

tionis normam ſuos omnes actus componit & conformat, an deſcriptionem hanc labefactat, quod ſubinde vir improbus aliquas actiones edit rationi conſentaneas, juſtè nonnunquam operatur aut ſobriè? Imò verò quòd ille, juxta ſenſum loquendo moralem, conſtanter ac perpetuò, ſed incertò hic & contingenter ex virtutis agit præſcripto, probum ab improbo ſatìs dirimit ac ſecernit. Pariter & hic; perpetua ſimultaneitas proportionalia diſtinguit ab improportionalibus, quæ non eam neceſſariò vel perpetuò ſortiuntur; neque quod hiſce nonnunquam obtingit, quicquam officit definitioni noſtræ. Quid quòd, præterquam quòd Archimedes & alii ſagaciſſimi veteres Geometræ, demonſtrationes haud quaquam ſuas falſo fundamento ſuperextruxiſſent, plerique definitionis hujus, ut talis, impugnatores moderni, hoc eam præſertim nomine reprobant, quòd demonſtrabilis, hoc eſt, neceſſariò vera, ſit; adeóque ſatis è principiis Tacquetus, Borellus, Hobbius (& quoad numeros è principiis Euclideis ipſe Clavius) illam demonſtrârunt, tam longè abeſt ut hæc enunciatio falſa ſit, aut juſta Rami accuſatio. Sed inſtat Ramus hiſce verbis ipſiſſimis; *Neque enim proportio ex illa triplici differentia ſatis accuratè concluditur, cùm fallaciſſimus in iſto argumento ſit elenchus* (ubinam verò Rame? me beabis ſi oſtenderis!) *ſubtenſa*, inquis, *æqualia ſubtendit peripheriam æqualem, major majorem, minor minorem. Ergò* (ſecundùm nempe definitionem Euclideam) *ſubtenſæ ſunt proportionales. Id quod* (rectè ais) *falſum conjicit Ptolemæus.* At verò, præclare cenſor, hæc ar-

gu-

gumentatio, juxta diverbium, Οὔτε γῆς, οὔτε οὐρανὸς ἅπτεται, nullatenus attingit aut ſpectat quod præ manibus eſt negotium, aſt ab eo longiùs quàm à tellure cœlum removetur. Ubi definitionis Euclideæ ulla hîc applicatio? ubi æquemultiplicium aliqua mentio? ubi quid his affine vel ſimile, quo deducatur peripheriarum cum ſuis ſubtenſis proportionalitas? Enimvero neque colligitur, neque colligi poterit, tale quicquam è definitione noſtra, non perperam intellecta. Contrarium certè conſequitur, & rectè colligitur ab ipſo Ptolemæo, è propoſitionibus elementaribus derivatis ex hac, eíque cognatis ſubſequentibus definitionibus Euclidæis. Ne gratis hoc dicere videamur, unam adſcribemus facillimam inſtantiam.



Sint arcus duo ZA, ZM, ille quadrans, hic ſextans totius circumferentiæ. Dico arcus ZA, ZM non eſſe proportionales ſuis ſubtenſis ZA, ZM, juxta noſtram definitionem. Multiplicentur enim antecedentes ZA per numerum

merum quaternarium, & consequentes ZM per numerum senarium; liquet quadruplam arcûs quadrantis ZA æquari sextuplo arcûs sextantalis ZM (cùm utrumque multiplex integram adæquet circuli peripheriam). Verùm quadruplex chordæ ZA minus est sextuplo chordæ ZM, perimeter scilicet inscripti circulo quadrati perimetro hexagoni eidem inscripti: Ergò licuit peripherias ZA, ZM non esse juxta definitionem Euclideam proportionales chordis suis. Quod erat ostendendum; unáque instantiæ Ramæanæ demonstratur infirmitas ac (verbo veniam) impertinentia. Interim demirari subit hujusmodi licentiosam crisin, quàm in veteres exercere solet Geometras homo, nè quid graviùs dicam, argutulus & dicaculus. Sed porrò disputat, *Ut elenchus iste non subesset* (ut quidem interpono minimè subest) *nihil tamen definitione istâ definietur* (quamobrem ita? sciscitor ego) *neque enim hîc*, inquit, *docebitur quid sint proportionales, sed alternatio proportionalium proponetur. Denique docebit ista definitio simplices terminos esse proportionales, quorum multiplices alterni fuerint proportionales. Itaque hysterologia duplex est, &c.* At quibus oculis vidit aut legit ullam hîc proportionalium alternationem proponi? ubi vel hilum comparet proportionalitatis multiplicium? excessum, defectum, æqualitatem æque multiplicium significari video; sed alternationis, aut proportionalitatis nullam volam, nullum cerno vestigium. Num hoc est differere, vel Sabinorum more quidlibet somniare? Quid, talibus adductum causis, talibus instructum argumentis fallitatis, falla-

cia,

ciæ, ſophiſtices, abſurditatis notas inurere venerandis iſtis capitibus; improperiis proſcindere tam inurbanis iſtos ſcientiarum conditores & corvphæos, abſque quibus fuiſſet, nil forſan haberet magnus hic tricarum artifex, præter Æſopicas fabulas, quarum analyſi mirificam illam ſuam addiceret dialecticam? Id quod innocentiùs plerumque feciſſet & tutiùs, quàm in tales viros atrociter invocâſſet. Sanè vix indignationi meæ tempero, quin illum accipiam pro ſuo merito, regerámque validiùs in ejus caput, quæ contra veteres jactat convicia. Reliqua proferre tædet quæ objicit, paris acuminis & peritiæ, quæque nil aliud præter hoc probant liquidiſſimè, quod omnino diſparis ſit negotii Logicas methodos texere, déque ſcientiarum arcanis judicare. Quod autem perem̃ptoriè, triſtiſſimáque cum ſeveritate concludit, *Quare talis definitio tollatur è Mathematis.* Replico, niſi machinis impulſa validioribus æternùm perſiſtet inconcuſſa, nec unquam è Mathematis dimovebitur. Illo dimiſſo, Tacquetum aggrediamur, naſi ſagacioris hominem; qui ſicut modeſtiùs, ita prout uſu venit fortiùs, & majori cum veriſimilitudinis ſpecie, nos laceſſit. Diſſerentem audiamus; *Imprimis, certum eſt eâ definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquam explicari.* Repono primò, quòd nulla definitio rei cujuſvis naturam aliter explicat, quàm aliquam ejus affectionem neceſſariam & reciprocam, id eſt, huic noſtræ parem, aſſignando. Siquam exhibere poterit, haud illibenter causâ cedam; at ſi nullam, ut ego confido nullam dari,

dari, definitiones ergò cunctas uno involvit crimine, uno telo configit. Qui circulum è radiorum paritate, triangulum è trium rectarum concursu spatium includente, quadratum è laterum æqualitate, & angulorum rectitudine definit, quid aliud quàm figurarum istarum naturam ex affectionibus quibusdam suis explicet? Dico secundò, nullam dari vel concipi posse naturam, qualem ille confingit ac supponit ab affectionibus ejusmodi necessariis distinctam, iisve priorem. Habere talem aliquam affectionem ipsa rei natura est, ei essentiale est, eam constituit. Saltem, quod perinde est, habere quandam affectionum congeriem ita connexarum, ut una quævis alias implicet, & secum necessariò trahat, ipsissimam rei cujusque naturam constituit. Unde qui dicit, res habens talem affectionem, ejus naturam explicat: ut e.g. circulus est figura pares habens radios, vel figura naturæ talis, ut pares habeat radios: ubi habere pares radios est ipsa circuli natura; vel saltem pares habere radios, & alias hanc concomitantes affectiones, ejus naturam integrè complectitur ac declarat. Sicut etiam habere rectos ad circumferentiam angulos diametro subtensos, vel aliam quamvis reciprocam affectionem æquè naturam exprimit circuli. Alias rerum naturas qui cogitant aut quærunt, nil aliud quàm chimæras insectando fugaces ac evanidas imponunt ac illudunt sibi; nullas sanè tales unquam deprehendent aut assequentur. Igitur Euclides cùm proportionalium affectionem necessariam exhibuerit, ejus naturam, quantùm fieri solet & potest,

teſt, abundè declaravit & explicuit. Adeóque factum ſatis videtur huic objectioni. Porrò, biſulco nos argumento perſequitur Tacquetus ; *Deinde* (inſit) *illa multiplicium proprietas adducitur vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualium, ut quandocunque ea demonſtrata fuerit, de quibuſvis rationibus inferre certò liceat æquales eas eſſe, vel is ſenſus illius eſt, ut per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo jam dicto excedere vel excedi.* Reſpondeo, utrumque verum eſſe, ut ſignum infallibile producitur, & exhibetur ut character proportionalium eſſentialis ac diſtinctivus. Quæ certè duo reipsâ nihil differunt, omníque probæ definitioni conveniunt. Nullum enim infallibile rei cujuſvis ſignum datur præter ejus eſſentialia attributa. Poteſt unaquæque res omnibus extra ſuam eſſentiam poſitis denudari, neque poteſt ideo quidvis non eſſentiale certam rei præſentiam indicare. Sed utrumque ſigillatim impugnat adverſarius hiſce verbis ; *Si primùm demonſtrare debuerat eam affectionem omnibus & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex ea rationum æqualitas certò poſſit inferri. Id verò minimè vulgare eſt theorema, quod neque Euclides neque poſt Euclidem ullus demonſtravit.* Reſpondeo, legem hîc Euclidi reliquíſque definitionum auctoribus injuſtam & impoſſibilem figi, ſcilicet ut demonſtrent definitionis prædicatum ſubjecto convenire : non tenentur, neque poſſunt id demonſtrare, ſed gratis aſſumunt, hoc eſt, attributo proprium ſubjecti nomen imponunt ex arbitratu ſuo. Num incumbit mihi demonſtrare circuli nomen ſolis pares

ra-

radios habentibus figuris competere? Minimè verò, sed iis omnibus & solis jure meo circuli nomen adsigno. Eodem planè modo pro lubitu suo (quamvis non temerè nec imprudenter, at certis quas non semel insinuavi de causis justis illis & idoneis) æqualium rationum nomen attribuit ὁ στοιχειωτὴς omnibus & solis dictâ proprietate præditis rationibus; proportionalium appellamentum appropriat quantis conditionem illam obtinentibus: unde propter hoc ipsum rationum æqualium, & quantorum proportionalium nomen meritò censendum est iis omnibus & solis congruere. Ut enim scientiarum magistris jus sit imponere nomina, discipuli teneantur ea recipere, justissimâ summèque necessariâ lege sancitum est. Unicum est, quod definitionis auctor ostendere tenetur (exemplis scilicet ad sensum claris, aut per evidentem discursum) attributum definitionis impossibile nihil, aut mere imaginarium complecti, sed revera posse res existere proprietate seu conditione suppositi præditas. Ut qui circulum definit e radiorum paritate (utor enim libenter & consultò facillimis & familiarissimis exemplis) nihil aliud demonstrare tenetur, quàm non repugnare tales figuras existere, quibus illa conveniat proprietas. Id-quod ex ipsarum generatione, per rectæ lineæ circumductum aut alio pacto, potest ostendere clarissime. Ita cum perfacile perspicuéque probari possit, idque passim præstetur ab Euclide, ubicunque definitionem hanc applicet materiæ cuivis determinatæ, dari quanta, quibus conveniat hujusce definitionis hypothesis, nihil am-

ampliùs est exigendum, eique licet optimo jure, quantis iis omnibus & solis proportionalium nomen affigere. Quod subdit autem hanc proprietatem proportionalibus accidere, esse theorema minimè vulgare: respondeo, repetens è jam olim expositis, quòd secundùm rem ipsam omnis definitio est theorema; propositio scilicet demonstrabilis ex aliis subjecti definitionibus, aut ex aliis reciprocis affectionibus priùs attributis subjecto. Neque non vicissim, quòd omne theorema possit in definitionem compingi, modò poterit exemplo perspicuo constare, quòd possibilem includit hypothesin. Quare quòd ex aliis proportionalium definitionibus inferri possit hæc proprietas, & ex ea theorema constitui, nihil ejus ad hoc capacitati derogat aut impedit, quò minùs legitimam ingrediatur definitionem: sicut neque permutatim, quia possit, ut supra ostensum, ex hac definitione deduci proprietas, è qua Tacquetus ipse malit proportionalitatem definire, adeóque quod ejus definitio theorematis indutura sit formam, ullatenus id officit, nè ejus definitio proba censeri debeat atque legitima, quamvis alia forsan officiant. Quod verò non vulgare theorema dicit, innuens nimirum è definitionibus ac principiis à seipso præstratis difficulter elici proprietatem hanc, nihil ad rem facit. Nec enim ad definitionis perfectionem requiritur, ut quæ in ipsa adhibetur proprietas ex aliis utcunque positis principiis facilè consequatur. Et prorsus eodem pacto quam ipse prolaturus est definitio theorematis haud vulgaris titulum merebitur, quia non omnibus adeò pro-

clive

clive fuerit eam è definitionibus aliis, nominatim ex hac noſtra, derivare. Neque deinde mirum eſt, nec ab Euclide, nec ab alio quopiam demonſtratum fuiſſe hoc theorema, cùm in definitionem aſſumpſerint, & principium habuerint aliis demonſtrandis inſerviens; quis enim unquam principia ſua aggreditur demonſtrare? Quopropter & nihili pendo diſcurſum illum, quem alibi Tacquetus effert his verbis; *Cujus quidem negotii cùm ſatis ardua atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam reipsâ cognoſcemus, facilè apparebit præpoſterè egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum & fundamentale indicium ſumi voluit ex hac multiplicium indemonſtrata hactenus proprietate, cujus tam remota & obſcura eſt cum rationum æqualitate connexio.* Quæ ſic in accuſatorem retorqueo, ut minime dubitem præpoſterum ei judicium objectare, qui vitio vertit Euclidi, quòd indemonſtratam proprietatem poſuerit in definitione ſua; quaſi verò ſubjecti proprietas in definitione poſita ſine manifeſta contradictione demonſtrari poſſit ab eo, qui per illam ſubjectum definiverit. Nam ex eo quòd in definitione ponitur, aſſumitur eſſe prima omnium proprietas, at quatenus demonſtrabilis aliquam ſupponit priorem, & idcirco nequit eſſe prima. Quare non præpoſtero, ſed rectiſſimo proceſſit ordine magiſter noſter. Cùm verò remotam & obſcuram eſſe clamat hujuſce proprietatis cum rationum æqualitate connexionem, notoriè petit principium; nam Euclides certè manifeſtiſſimam eſſe ponit, & ponendo facit connexionem ejus cum hac, cùm ex ea hanc definierit. Sed peragit, ut opinatur

natur, nos premere; Si ſecundùm (hoc eſt, *Si voluit Euclides per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi, quàm earum magnitudines dicto modo excedere vel excedi*) *ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſoluta rationum æqualitate.* Ad quæ nihil amplius habeo quod reſpondeam, quàm hîc ab eo neſcio quam rationum abſolutam æqualitatem ſomniari, præexiſtentem & diſtinctam à paſſionibus per quas rationum æqualitas definiatur; qualis profectò nulla datur, & ab illo fine fundamento dari ſupponitur. Rationum æqualitas (ſicut aliæ quævis in ſcientiis conſideratæ materiæ) non aliunde quàm ex convenientia cum definitione ſua, ſeu Euclidea ſeu quævis alia, ſiqua reperiri poteſt, legitima cenſeri poteſt. Rationes ſunt exinde abſolutiſſimè formaliſſiméque æquales, hoc ipſo quod proprietatem habent expreſſam in definitione ſua: quare cùm in Euclideis theorematis demonſtratur hæc proprietas quibuſcunque quantis convenire, ſimul conſtat iis rationum æqualitas competere; ſicut quando de figura qualibet oſtenditur radiorum paritas, eo ipſo demonſtratur illam eſſe circulum. Infirmum igitur & irritum eſt epiphonema, quo ſuas haſce claudit argumentationes; *Quomodocunq; igitur illa definitio accipiatur librorum* 5, *ac* 6 *demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam.* Juxta quam certè ſententiam vacillabunt omnes cujuſcunque ſcientiæ demonſtrationes. Nam ſi

perpetuò demonſtrari debet in definitionibus attributas proprietates veris ſuis ſubjectis connecti, nullus omnino finis erit demonſtrandi, vel nullum potiùs principium, aſt ad infinitum retro procurrat oportet omne ratiocinium : præterquam quòd quamcunque proportionalitatis definitionem ipſe nobis aſſignaverit, idem ei verbis & ſententiis iiſdem objectari poterit ; ſuà lege conſtrictus tenebitur ipſe demonſtrare proprietatem, quam aſſumit rationibus æqualibus congruere, è priore ſcilicet aliqua, & illam porrò ab alia, donec interminabilis moleſtiæ pertæſus errori ſuo renunciandum agnoverit. Demum ad hoſce Tacqueti diſcurſus
1. univerſim adnoto ; Primò, quod ubique principium petit, & vitioſos committit circulos : non eſt proxima (vel eſt remota) proprietas, quia demonſtrari poteſt, hoc eſt, quia datur alia propior : datur alia propior, quia demonſtrari poteſt, æqualitatem rationum non conſtituit hæc proprietas (hoc eſt, ejus definitionem ingredi nequit) quia differt ab ea, non clarè connectitur, valde remo-
2. vetur ab ejus natura. Et ita paſſim. Secundò, quòd nec ille nec alii plerique, quantum judico, definitionis naturam ſatis perſpiciunt ; in quibus revera nihil fit aliud quàm nomen imponitur rei, quatenus illa paſſioni ſubjacet, utcunque per ſenſum aut per ratiocinium evidenter exploratæ : verùm neſcio quas illi naturas, eſſentias, formalitates abſtruſiores cogitant, in apricum nunquam proferendas. Per quas naturas rem ad vivum reſecando, dilucebit eos nihil aliud intelligere, quàm rei definitæ nomini,

qua-

quatenus in uſu communi verſatur, reſpondentes conceptus aut ſignificatus aliquos imperfectos & indiſtinctos, in ſcientiis minimè reſpiciendos, & ad condendas demonſtrationes ineptos; ad quos proinde nullatenus exigendæ ſunt definitiones: imò ſecludendis & eliminandis iis, ipſorúmque loco ſubſtituendis rerum certis, diſtinctis, atque claris idæis efformantur definitiones, rebus appropriantes nomina, quatenus illæ ſubjiciuntur affectionibus quibuſdam ad ſenſum vel ad intellectum conſpicuis. Noto tertiò, quòd hujuſmodi ratiociniis adductus Tacquetus, æqualium rationum definitionem aſſignârit admodum vitioſam & inutilem. Ait enim æquari rationes, cùm unius antecedens eodem modo continet ſuum conſequens, vel in eo continetur: quo alterius antecedens ſuum conſequens continet, aut continetur in eo. Quæ definitio non niſi craſſam & confuſam ingenerat proportionalitatis idæam, nulli procreandæ concluſioni parem aut idoneam. Anceps enim & obſcura phraſis eſt, eodem modo continere, neque revera, niſi per aliam definitionem limitetur, aliquid diſtinctè ſignificans. Multi modi ſunt aliquatenus iidem τῷ continere; majora quælibet continent minora eodem exceſsûs modo; inæqualia duo quævis eodem inæqualitatis modo ſe reſpiciunt quo alia bina inæqualia. Ergò niſi per aliquod reſtrictius & certius indicium declaretur, quid ſit eodem modo continere, quænam modi deſignetur hîc identitas, & proinde quid ſit æqualitas rationū ignorabimus aut ambigemus. Ut alia jam præteream incommoda, quib⁹ iſta ſubjicitur definitio:

unica ſupereſt exceptio, præ reliquis maximè plauſibilis, & cui vereor ne penitus expedieadæ non ſim; non quia magnam vim habet in ſe, verùm quia multorum præjudiciis favet, & patrocinatur ignaviæ: his ab eo verbis proponitur; *Denique, ut ſibi conſtarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit, & tyronibus ſemper plurimum faceſſivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant.* Quod capitale crimen ut aliquatenus amoliar atque depellam, reſpondeo primo, diſpiciendum eſſe quibus ex cauſis iſta multis adeò faſtidioſa quam obtendunt perplexitas oriatur; num ex reipſa, quæ commodiorem nullam aut clariorem expoſitionem admittat; vel ex interpretum incuria, qui non ſatis hanc definitionem perſpicuis exemplis elucidârint; an ex diſcentium culpa, qui priuſquam animum adverterint ſedulò, ſerióque perpenderint, faſtidio correpti difficultatem ſibi quandam inſuperabilem imaginantur & perſuadent. Si quid horum in cauſa ſit, ut certè mihi compertum eſt hæc omnia nonnihil conferre, quo perplexior videatur hæc definitio, abſolvendus eſt auctor, aliiſque cauſis hoc quicquid eſt culpæ imputandum. Res ipſa penitus excuſari nequit, quæ propter aſymmetriam quantorum aliquâ peculiari difficultate laborat; ſic ut nemo non arduum eſſe fateatur, affectionem aliquam proportionalibus æquè congruam deprehendere, definitionem aliquam cunctas rationum æqualitates complectentem exhibere. Quod & hinc patet, quia præclaris viris huic morbo remedium ad-

adhibere conniſis hactenus accidiſſe videtur, ut vel nihil præſtiterint omnino ſufficiens, aut ut viis inſtiterint prolixioribus, nec minùs impeditis & implicitis; aut methodos ſaltem tradiderint culpæ cuipiam graviori ſubditas: adeò res ipſa contumaciter repugnat, ut ratione pertractetur admodum facili & expeditâ. Nec interpretes omnino culpâ libero, nè quidem optimum Clavium, qui licet hanc definitionem cùm explicuerit probè, tum judicio meo validè propugnârit, tamen exemplis eam ſatis illuſtribus & appoſitis haud videtur declarâſſe. Nam exempla quæ profert verborum ſenſum potius explicant, quàm (id quod præcipuè definitionem quamvis commendat ſimul ac illuſtrat) conditionis in definitione poſitæ poſſibilitatem, & veram in rebus exiſtentiam repræſentant; ut & nimiâ generalitate quadam ſuâ diſcentium phantaſias obturbant, tum fortè non ſatis expreſſe luculentéque cavet, nè diſcentes (imò potiùs occaſionem præbere videtur ut ipſi) inductionem quandam exigi, ſibíque putent infinita quædam multiplicationum tentamina mente percurrenda; quod certè mirum non eſt, ſi confuſos eos reddat & deſperabundos; cùm tamen nihil hîc tale deſideretur, uti toties monuimus. Quod ipſos diſcentes attinet, nimis quàm apparet, eos ſibi plerunque deeſſe. Cum enim hujuſce definitionis verba clariſſima ſint & omnis homonymiæ expertia, quotuſquiſque tamen eſt qui vel iis penitus intelligendis operam navat, qui tantam à ſuo ſtomacho patientiam impetrat, ut trium lineolarum ſenſum accuratè perpendat? Equidem haud

modico pignore contendere, meámque penè ſidem obſtringere non dubitem, qui definitionem hanc ſeriò perlegerit, ac ad ejus tantùm in prima, vel in ultima ſexti elementi propoſitione applicationem haud ſegniter attenderit, illi deinceps hanc definitionem haud ita perplexam, intricatam, aut difficilem appariturам. Hiſce præmiſſis ad Tacqueti verba repono, negando planè quòd ullus hîc extet labyrinthus, rem quàm in ſe eſt intricatiorem reddens, quem non expoſitoris extricet mediocris ſolertia, à quo non attentionis modicæ filum tyrones expediat. Addo, ubi nulla verſatur in vocabulis amphibologia, ubi nullum à prolixitate tædium, ubi ſemper directiſſimus adhibetur diſcurſus (quæ ſedulò rimanti deprehendentur omnia in hoc caſu concurrere) non ibi tanta ſubeſſe poteſt obſcuritas aut difficultas. In paucis elementi quinti propoſitionibus, iiſque præcipuis, adhibetur hæc definitio; ſed ubique quantùm memini directè per eam, & immediatè demonſtratis. Ac ubi ſpecialibus accommodatur materiis in aliis elementis, vel in aliis libris Geometricis, concluſionem ſemper infert uno ſimpliciſſimo directiſſimóque modo, non ut alii ſuis in methodis faciunt indirectè, vel ad abſurdum reducendo; qui demonſtrandi modus (ut omnes agnoſcunt) obſcurior eſt & ignobilior. Porrò, ſi liceret cum Tacqueto quicquid velimus, ut ſuâ luce clarum adſumere, quódque maximopere veteres devitàrunt Geometræ, axiomatum numerum in immenſum cumulare, magno quidem ſæpe compendio res agi poſſet, at quantum brevitatis accederet, & exurgentis inde

non

non nullius evidentiæ, tantum decederet firmitati, quæ multo potior eſt, & imprimis ſpectari debet in ſcientiis. Qua de re jam olim plura (ſi commemini) diſſertavimus. Quare non eſt quòd ſuæ methodi brevitatem aut evidentiam jactitet Tacquetus; præſertim cùm nullam (aut æquipollentem nulli) analogiæ definitionem ipſe ſubſtraverit, & propoſitiones ſuas, ſeu gratis aſſumptas, ſeu ut ipſe exiſtimet demonſtratas, incerto ſubjecto accommodaverit. Aſt videmur eximium hunc adverſarium jam ſatis repuliſſe. Succedit D. Hobbius, quo tamen breviſſimè defungemur, quoniam ejus argumentis in præcedentibus adaptabiles ſuggeſſimus ſolutiones. Audiamus: *Sed invenire per hanc definitionem hujuſmodi quatuor quantitates impoſſibile eſt, quia multiplicatio per omnes numeros, cùm infiniti ſunt, eſt impoſſibilis; non eſt ergò definitio hæc, ſed hypotheſis.* Ad hunc diſcurſum prænoto, quòd malè ſumit hic philoſophus Euclidem, id in hac ſibi definitione negotii dediſſe, ut proportionalitatis generationem traderet. Nihil ille tale meditatus aut molitus eſt, ſed ut proportionalitatis ſolummodo diſtinctivam proprietatem adſignaret, utì cùm circulum ex radiorum paritate definivit. Ubi forſan ἐν παρόδῳ ſit operæ pretium annotare, quòd etſi communiter optimæ ſint ejuſmodi definitiones, quæ rerum generationes exprimunt (imo revera ſolæ tales accuratè loquendo bonæ ſunt, cùm res definitæ ſunt immediatè generabiles, & per ſe quaſi primariò ſubſiſtunt) attamen nonnullis rebus ejuſmodi definitiones non conveniunt; iis ſcilicet quæ non per ſe *Dial.* 2.

generantur, at ceu passiones secundariæ ex aliarum rerum jam progenitarum constitutione resultant, & promanant ex ipsarum primariis affectionibus. E.g. qui focum parabolæ vel ellipsis definiendum suscipit, postquam animadverterit inesse talem parabolæ jam constitutæ proprietatem, ut omnes ad axem paralleli radii a curva parabolæ linea, ad certum quoddam in axe punctum reflectantur; ut & ellipsi tale quoddam symptoma competere, quòd ab uno quodam in axe puncto prodeuntes radii, ab ellipsis ambitu versùs aliud in axe punctum retorquentur; hâc (inquam) proprietate (quæ è primariis aliis linearum istarum proprietatibus fluit) deprehensâ, focum optimè definiat, non è generatione suâ, quod impeditissimi foret negotii, sed è comperta dicta proprietate; punctum in axe scilicet, in quod radii ad axem paralleli, vel ex uno quodam designabili in axe puncto prodeuntes dicto modo reflexi congregantur aut tendunt. Ita proportionalitas, cùm non sit res primariò subsistens, nec immediatè generabilis, at passio quædam è quantorum aliqua prædeterminata conditione resultans, vix fieri potest, saltem non expedit, ut per generationem aliquam definiatur. Utcunque manifestum erit, hujusce definitionis verba perscrutanti, nullam hic de facto generationem attingi, sed aliquod duntaxat symptoma quatuor subinde quantis conveniens innui, quibus ex hypothesi quòd illo gaudent symptomate, nomen inditur eandem habentium rationem seu proportionalium. Jam ad exceptionem Hobbianam respondeo, quòd etsi prorsus im-

impoſſibile concedatur, per hanc definitionem quatuor proportionales quantitates expiſcari (ſicut impoſſibile eſt è radiorum paritate circulum invenire, tentando ſcilicet & experiendo, num ſinguli in figura propoſita qui inſunt infiniti radii pares ſunt) tamen id quod hîc ſolùm intenditur & ſufficit, admodum facile eſt demonſtrare, quòd quatuor nonnullis quantis (v.g. duobus æquè altis parallelogrammis & eorum baſibus) hæc proprietas univerſaliter conveniat (ſicut & facile fuerit è datis quibuſdam conditionibus oſtendere figuram aliquam habere radios omnes inter ſe pares). Ad illud nulla requiritur per omnes numeros multiplicatio, nullus labor infinitus, ut multoties oſtenſum. Igitur hæc objectio nihil efficit. Sed porrò; *Non eſt* (inquit) *definitio hæc, ſed hypotheſis, & quidem vera, ſed non principium, quia demonſtrabilis eſt, & ab Hobbio demonſtratur.* Regero primùm, quòd eandem rationem habentia vel proportionalia quanta vocitari debuerint ab Euclide, quæ proprietatem obtinent hac in definitione ſignatam, nec ille nec alius quiſquam demonſtravit, aut potuerit demonſtrare. Hoc enim ſolùm ab Euclidis libero pendebat arbitrio. Non igitur omnino verum eſt hanc definitionem ab ipſo fuiſſe demonſtratam. Secundò, ut priùs dico, nihil officere definitioni cuivis, quòd proprietas, à qua definitur, poſſit de ſubjecto per aliam quandam paſſionem definito demonſtrari; aliàs nulla definitio bona foret. Sanè nonnullæ res πολυπαθεῖς (multis paſſionibus præditæ) poſſint compluribus modis commodè ſatis & rectè definiri: ſint exem-

plo

plo conicæ ſectiones, quæ cùm admodum variis modis progigni poſſint (per motuum dependentias, & per motuum compoſitiones diverſimodas; per variorum corporum ſectiones, pérque multifarias methodos infinita puncta deſignandi) cúmque paſſiones innumeras obtineant intimè ſibi connexas, & ex parte rei æquè primas, æquéque claris hypotheſibus ſubnixas, eapropter pluribus modis definiri poſſunt & ſolent; adeò quidem ut ego nullam ex iis rejiciendam arbitror, quamvis unâ quâvis ſelectâ, ceu primâ, reliquarum ex ea proprietates conſectentur, & proinde demonſtrabiles ſint. Ex quo liquet obiter falſum eſſe, quo præſertim niti videntur adverſarii, pronunciatum illud ſeu placitum Ariſtotelis in Topicis traditum,

Topic. VI. 5 Πλείους ἐκ ἐνδέχεται τοῦ αὐτοῦ ὁρισμοὺς εἶναι *(Fieri nequit, ut ejuſdem rei plures ſint definitiones).* Imò fieri poteſt, ut reipsâ pluſculæ ſint, tot nempe rei cujuſvis definitiones, quot ipſa proprietates reciprocas habet, liquidò nobis expoſitas & apparentes. Igitur nequicquam D. Hobbius definitioni noſtræ repugnat. Recitabo tantùm quæ circa definitionem hanc in opere profert Arithmetico vir clariſſimus & eruditiſſimus partim ei faven-

Cap. 35. tia, partim adverſantia; *Nos* (ait) *hanc definitionem, quamvis veram quidem, & Euclidis ſatis accommodam, in noſtris demonſtrationibus omittendam duximus, neque ad hoc πρίσπιον proportionalia accommodamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeò forſan, tyronibus præſertim, perſpicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate reſpicit, quàm eorundem affectionem aliquam ſatis remotam.* Hæc ille,

ille, quibus haud abludentia cùm antehac ſatis expenderim, cauſæ nihil eſt cur iis immorer ampliùs diſcutiendis. Ad triarios jam deventum eſt, ad ipſum illum ſubtiliſſimum Borellum, adverſarium acerrimum, quíque præ reliquis hoc præſtitit egregium, ut novam proportionalitatis doctrinam, equidem pulchram & ſolidam, attamen Euclideæ minimè ſicut exiſtimo cunctis expenſis anteferendam, è ſua penu protulerit. Verùm neç in ejus diſputatione ſedulò perſcrutans, omnia quicquam reperio gravioris momenti, definitioni noſtræ derogans. cui non in prædictis videatur abundè ſatisfactum. Clavium pleraque magis quàm Euclidem attingunt; Clavii verò dicta, ut ut poſſem, non è re noſtra jam duco propugnare. Utcunque quia modulum ſuum etiamnum exceſſit præſens diſſertatio, quæcunque nova pertendit Borellus conſideratu digna, poſthac examinanda relinquo; cùm & in ejus ac aliorum recentiorum methodos animadverſionem inſtituam. Interim ſufficiat hactenus prodiiſſe.

LECT.

LECT. VIII.

POſtremâ Lectione conniſi ſumus à nonnullis præcipuis adverſariis contra definitionem proportionalium Euclideam vibrata tela depellere. Superest Borellus, omnium graviſſimus, opinor, & acerrimus ejus impugnator, eóque pluris habendus, quòd ab aliis fruſtra tentatam novam proportionalitatis eruendæ methodum, admodum (ut quod verum eſt liberaliter agnoſcamus) pulchram è proprio cerebro concinnárit; operam in eo præſtans (fateor ultro) laudabilem & non inutilem, cùm variis modis eaſdem pertractari materias, è diverſis principiis eadem deduci theoremata voluptati ſimul ac uſui ſit; in ſua tamen (ut arbitror) extruenda methodo felicior fuit, quam in communi diruenda. Id quod è veſtigio jam aggredimur oſtendere. Quid objiciat audiàmus:

Pag. 125. *Revera* (inquit) *dici non poteſt, quòd aſſignata proprietas naturam rei declaret, & diſtinguat à qualibet alia, imò rem difficilem obſcuriorem reddit.* Ita judicat: at nos hæc temerè dici ſatis (opinor) in præcedentibus oſtendimus; ſcilicet proportionalitatis non aliam eſſe naturam, quàm hujuſmodi proprietatem aliquam habere, quam aliæ proprietates ſequantur; adeóque naturam ejus in hac definitione (quantùm in ulla fieri poteſt) abundè declarari: quódque diſtinguat hæc proprietas analoga à non analogis, cùm analo-

gia

gia cum ea reciprocetur, & ex inſtituto vel arbitrio definientis (non quidem illo licentioſo, ſed legitimo ac rationabili) nil aliud ſignificet analogum, quàm τὸ hanc habere proprietatem. Denique, rem ab ea obſcuriorem reddi pernego: *Nam* & (id quod ipſe verbis diſertis fatetur) *verba definitionis exponunt abſque ambiguitate quid ſit talis proprietas*: Et (ego addo) clariſſimè patet eam rebus quamplurimis ineſſe; nec non ejus applicatio quod experientia planè monſtrat, haud difficilis eſt; & nihil obſtat quin proportionalium nomen, aut aliud quodvis, hanc proprietatem habentibus quantis attribuatur; ſaltem e nominis iſtius aſſignatione nulla poteſt obſcuritas oriri. In quo igitur (obſecro) conſiſtit ubi verſatur, unde reſultat hæc obſcuritas? Nuſquam certè. Niſi quis proportionalitatis arcanam neſcio quam naturam, omni definitionem ingrediente proprietate priorem ſomniet. Verùm judicii ſui rationes ac firmamenta ſubjicit; illas & hæc breviter expendamus: *Ignoratur* (ait) *an in natura reperiri poßunt quatuor quantitates habentes talem paſſionem, quòd nimirum infinitæ æquemultiplices antecedentium, ſi comparentur cum infinitis æquemultiplicibus conſequentium debeant unà excedere, vel unà deficere, vel unà æquari.* Reſpondeo, non ignoratur hoc, quoniam exemplis perſpicuis commonſtrari poteſt, exiſtere complura 4 quanta dictâ conditione dotata. Quòd ſi non conſtaret, haud quaquam hæc definitio poſſet ad uſum applicari. Nam quoties applicatur, tot ſuppeditantur exempla quantorum hâc proprietate gaudentium. Non aliter ignoratur dari figuram æquales ra-

radios habentem, donec id ex generatione quapiam ad ſenſum, vel ad mentem, ex aliquo ſatis evidente diſcurſu certius fiat. Itaque nihil valet hoc primum ὄπιχείρημα. Rurſus, *Infinitæ* (inquit) *infinitæ iſtæ comparationes comprehendi non poßunt*; *& ideo hæc paſſio non erit evidentiſſima, qualis debet eſſe illa, quæ principium ſcientiæ conſtituit.* Primùm, demiror ab acutiſſimo viro ejuſmodi diſcurſus inſtitui, tum (nè repetam quæ ad ſimiles diſcurſus antea repoſui) ſciſcitur an non experientia doceat ab Euclide, Archimede, cæteris pleriſque Geometris ſæpè, minimóque negotio demonſtrari, quòd multis quantis (triangulis videlicet & parallelogrammis æquè altis ac ſuis baſibus, pyramidibus, priſmatibus, conis, cylindris itidem cum ſuis baſibus, circulis & ſphæris cum ſuis ſimilibus ſectoribus, angulis cum arcubus quibus inſiſtunt, ſpatia uniformi velocitate percurſa cum ſuis temporibus, momenta ponderum cum ſuis à centro ſtateræ diſtantiis, innumeríſque talibus) conveniat hæc proprietas? Quomodo igitur incomprehenſibilis eſſe poteſt? Secundò, dico nullam hîc comparationum infinitatem ſupponi, non certè magis quàm in quavis enunciatione generali, terminorum univerſalitas infinitatem ſupponit. Nam quod habetur in definitione καθ' ὁποιανοῦν πολλαπλασιαζμὸν (per quamcunque multiplicationem) quid aliud quàm univerſalitatem innuit conditionis præſtitutæ; non ex omnium ſingularium luſtratione, vel inductiva quavis collectione, ſed ex univerſali ratiocinio comprobandæ? Requiritur nempe duntaxat, ut omnia æquemultiplicia an-

antecedentium taliter afficiantur erga omnia conſequentium æquemultiplicia; taliter (inquam) afficiantur, hoc eſt, idem rationis genus, ſeu modum eundem obtineant, exceſſum, defectum, aut æqualitatem. Si ſubeſt hîc incomprehenſibilis aliqua infinitas, etiam omnia ſcientiarum omnium theoremata, univerſalibus quippe terminis conſtantia pariter incomprehenſibilia ſint oportet. Neque comprehenſibilis erit hæc propoſitio, Omnis homo eſt animal, quoniam in ea affirmatur animalitatis proprietatem infinitis qui exiſtere poſſunt hominibus competere. Tertiò, manifeſtiſſimè refellit hanc inſtantiam ipſa definitionis hujus applicatio; quæ non aliter procedit, quàm unam quamvis indeterminatam & arbitrariam multiplicationem antecedentium unámque conſequentium pro omnibus, quæ cogitari poſſunt ipſorum multiplicationibus ſubſtituendo; prorſus eodem modo quo ſolent univerſales quæcunque propoſitiones applicari. Nulla deprehenditur hîc infinitas, ambages nullæ, ſed argumentatio ſimpliciſſima. Nec igitur hæc ratio quicquam efficit. Cæterùm infit tertiò, *Licèt hypotheticè concedatur adhuc ignotum eſt, quidnam ex ambage iſta infinitarum comparationum colligi debeat* Repono nihil opus eſſe ut quid hypotheticè concedatur, poteſt enim aſſeri poſitivè, poteſt velis nolis extorqueri reipsâ dari quanta tali conditione prædita, quod multoties oſtendimus. Dein, percontor quid ſibi velit *ignotum eſt quid colligi debeat*; nihil hîc quicquam colligitur: at verò ſaltem fit, id quod in omni definitione fieri ſolet, aliquâ conditione ſeu proprietate præditis

ditis quantis nomen imponitur, æqualem ſcilicet rationem habentium aut proportionalium nomen imponitur quantis ità conditionatis aut affectis. Ex quo poſtea colligitur, ſi quando per diſcurſum aut aliunde patet hanc conditionem quibuſvis quantis convenire, quòd illa quanta proportionalia ſunt. Addo, quòd male rurſus ambagem increpat infinitarum comparationum, quæ nuſquam hìc ulla comparet. Sed inſtat porrò; *Nam nec ipſe Clavius expeditè & lumine naturæ colligere potuit, ex paſſione æquemultiplicium in magnitudinibus commenſurabilibus proportionalitatem, ſed coactus fuit hoc demonſtrare in ſuis illis quatuor propoſitionibus. Sed quomodo erit notiſſima illa paſſio, quæ abſque demonſtratione acceptari non poteſt in magnitudinibus commenſurabilibus?* Reſpondeo, ad hoc ut proprietas aliqua uon injuriâ definitionem ingredi poſſit nihil referri quomodo demonſtretur, aut demonſtrari poſſit ex alia quavis proprietate præſuppoſita; aliàs, ut antehac oſtenſum, nulla definitio daretur bona, poſſint enim omnes ita demonſtrari. Secundò, quod Clavius proprietatem hanc ex alia ſymmetrorum proportionalium definitione (non quidem in quatuor, aſt in uno ex quatuor, nec illo perquam intricatè prolixéve demonſtrato theoremate) deduxerit, id non propterea fecit (opinor) quia neceſſe fuit ut reciperetur hæc proprietas eam demonſtrari; nec ut ejus evidentiam propalaret; ſed ut hujuſce conſenſum & connexionem cum altera ſymmetrorum bene nota paſſione monſtraret. Id quod conari vel efficere, nihil hujus proprietatis aliunde per exempla notæ (vel ne-

noſcibilis) evidentiæ præjudicat. Porrò tertiò, licèt (hoc ei demus) hæc non ſit notiſſima paſſio quantorum commenſurabilium eandem rationem habentium, ut talium; nil tamen impedit quin ſit generalium, omnibus tam ſymmetris quàm aſymmetris proportionalibus convenientium, paſſionum notiſſima; quódque de facto notiſſima ſit, experientia ſuadere videtur, quoniam etſi complures operâ maximâ contenderint, nemo quòd ſciam hactenus genuinam aliquam hâc notiorem aſſignaverit. Quinimo denique, nullius hypotheſis poſſibilitas evidentior eſſe poteſt, illâ quâ ſubnititur hæc definitio. Non igitur ulla poteſt proportionalium evidentior paſſio demonſtrari; nec igitur ſuccedit hæc argumentatio. Sed Euclidem ictu tandem atrociſſimo ferit, & tantùm non proſternit, ipſo ſuo teſtimonio reum, & proprio tacitè judicio condemnatum. *Inſufficiens* (inquit) *judicata fuit ab ipſomet Euclide, quando proportionalitatem commenſurabilem (commenſurabilium vult dicere) iterum libro ſeptimo definivit.* Ad hanc criminationem reſpondeo prorſus inficiando, quòd eapropter Euclides hanc definitionem ſuam inſufficientem judicavit, quoniam in Elem. VII. adhibuit aliam; nec enim hanc ſi inſufficientem ipſe judicâſſet, omnino adhibuiſſet, ſed aut nullam tradidiſſet, aut aliam inveſtigâſſet. Abhorruit hoc ab Euclides cùm ingenio tum inſtituto ſibi minùs probata, nedum improbata proferre; ſuam ut ſciens prudens στοιχείωσιν inſufficientibus principiis contaminaret. E contra potiùs quia ſeptimi elementi definitionem omnigenæ proportionalitati deprehendit

hendit haud competentem, ſolis utpote ſymmetrorum proportionalitatibus adaptabilem; hanc verò comperit univerſis congruam, idcirco dum hîc loci generalem iniret analogiæ tractatum, illa rejectâ hanc amplexatus eſt, jure meritóque. Illam verò (poſtea vel prius haud dixero) ſymmetris proportionalibus applicuit, non tam neceſſitatis quàm commoditatis gratiâ, quia nonnihil ad vulgarem captum iſtius ſpecialis materiæ reſpectu facilior ac ſimplicior videbatur. Neque mirandum adeò cùm Arithmeticam theoriam ſeparatim, & ab aliis independenter ſuſciperet pertractandam, ſimpliciſſimam delegiſſe proprietatem, quâ numericas analogias determinaret, etſi neutiquam iſta conveniret aliis analogiis, neque generali proportionalitatum doctrinæ ſufficeret. Quòd autem liceat, & nonnunquam expediat (varietatis ac facilitatis causâ) ſpeciales doctrinas e ſpecialibus principiis extruere (Logicæ communi rigore quantumvis adverſante) quamvis ad plenam Euclidis defenſionem ſpectat, extra tamen præſentem controverſiam ponitur adſerere, neque nos idcirco quæſtionem iſtam nunc attingemus. Sufficiat indicâſſe non exinde, quod pertendit adverſarius, ſequi quia particularem definitionem alibi particulari materiæ accommodavit Euclides, quòd ideò generalem hanc, & materiæ generali adaptatam definitionem ipſe ſuam improbârit, aut inſufficientem judicârit. Ex hiſce tandem patet quòd haud firmis nititur præmiſſis, quam Borellus ſubjicit concluſio: *certum ergo eſt obſcuram & difficilem eſſe proprietatem proportionalium*

nalium definitionis ſextæ, propterea quòd nedum evidenter naturam proportionalium incommenſurabilium declarat, ut viceſima definitio ſeptimi facit, ſed rurſus quod mirum eſt neque manifeſtat ea, quæ de reipſa definienda præcognovimus. (Interpono, quòd ſæpiùs inculcatum eſt, nullam eſſe proportionalium naturam dictâ proprietate priorem, nec à nobis ante definitionem de iis quicquam, diſtinctè ſaltem & certò præcognoſci. Sed pergit) *Nam ex eo quòd quatuor magnitudinum æquemultiplices habent illam conditionem exceſſûs vel defectûs minimè percipitur quando aut quomodo, ſi antecedentes unà excedant aut deficiant à ſuis conſequentibus, ſint proportionales, neque ſi exceſſus ſint inter ſe æquales, necne.* Quæ Borelli verba perquam obſcura videntur & ambigua; quicquid verò ſignificant, mihi certum eſt, ea nobis haud quaquam officere. Nam ex eo quòd quatuor quantorum æquemultiplices illam habent conditionem, omnino percipitur iis proportionalium nomen congruere, neque refert aliud quid percipi. Poſt hæc omnia ſupereſt una, præque reliquis graviſſima, (verâ modò ſuppoſitione niteretur) objectio ſubmovenda. *Nec demum* (ait) *hæc minima cognitio ex dicta proprietate colligi poteſt, quod ſcilicet quatuor magnitudines ſint proportionales, cùm prima excedit ſecundam, neceſſariò tertia magnitudo quartam ſuperare debet, quod Clavius confitetur in prop. 16. lib. 5. Elem.* Reſpondeo 1. Clavio falſam, ut videtur; confeſſionem impingi; nihil in loco citato tale deprehendo. 2. Si non ex illa proprietate, quomodo demonſtravit Euclides; quando nullam proportionalium alteram definitionem

præmiserit? Per eam certè demonstravit, etsi non immediatè. Et quis nescit in plerisque demonstrationibus subjecti proprietatem non immediatè ex ipsius definitione deduci. Sufficit id fieri mediatè per proprietates alias è subjecti definitione priùs enatas. 3. Ad 3o, quamvis Clavius non collegerit, tamen immediatè, neque difficilè, colligi posse cognitionem istam ex hac ipsa proprietate, quod sic (apagogico discursu) probo: Sit A.B :: C.D, juxta definitionem nostram; sitque A⊏B, dico fore C⊏D. Si negas, esto C= vel ⊐D, & multiplicentur omnes termini per eundem quemvis numerum M; estque ob A⊏B (ex hypothesi) etiam MA⊏MB; & ob C⊐D erit MC⊐MD. Ergò non erit juxta definitionem A.B :: C.D, contra primam hypothesin; maléque negavit adversarius posito esse A⊏B fore C⊏D. Ita dicta cognitio (quam vocat) è nostra definitione prolicitur, & adversarii diluitur objectio. *Quis ergo* (demum infit objectator) *dicet sextam definitionem esse bonam, & principium scientiæ, si tam obscuram affert cognitionem & imperfectam.* Ego, coronidem imponens huic prolixæ disputationi, me non diffiteor esse qui (quicquid ille, quicquid alii contradixerint) asseveranter dicam quòd definitio sit in primis optima, quòd accommodatissimum huic ipsi scientiæ principium, quòd cognitionem suggerat evidentissimam & perfectissimam. Id quod mihi videor adversùs omnes contra nitentium assultus eviciſse; ita cùm non magis antiquitatis adductus reverentiâ, quàm rei verisimilitudine compulsus, Euclideam definitionem, & ab eo pendentem proportionalitatis do-

doctrinam, utcunque vindicârim; proximè ſequitur, ut quod pollicitus ſum aliarum quas ei ſubrogandas autumàrunt definitiones ac methodos paucis perſtringam, quo conſtabit ampliùs Euclideæ doctrinæ præſtantia; neque non quali neceſſitate conſtrictus, quorúmque devitandorum incommodorum gratiâ, toties memoratam huc proprietatem adſciverit. Prima methodus eſt illorum, qui cenſent ſimilitudinem vel identitatem reſpectûs eſſe paſſionem proportionalium notiſſimam, à qua debent definiri. Juxta quam exiſtimant præcipuas nonnullas Elem. V. propoſitiones axiomatum loco habendas, lumine quippe naturali perſpicuas, & probationem nullam deſiderantes; tum ex iis reliquas proportionalium affectiones deducunt. Hanc ſententiam jampridem vir doctiſſimus Johannes Benedictus amplexatus eſſe dicitur; eam verò (ſaltem ei reipsâ non diſparem) nuperrimè vir acutiſſimus And. Tacquetus in formam redegit & expolivit. Hæc methodus inſufficientiæ arguitur à Borello, mihíque laborare videtur multiplice defectu. Nempe primò, videtur inepta quædam in hujuſcemodi definitionibus tautologia committi, próq; definitionibus enunciationes apponi prorſus identicas; tales ſcilicet ſimiles (vel eaſdem) rationes obtinent quanta, quæ ſimiles (vel eoſdem) in quantitate reſpectus habent; h.e (quid enim aliud intelligi datur) quæ ſimiles (vel eaſdem) rationes habent. Annon hoc eſt idem per idem definire? num hoc eſt rei propoſitæ naturam declarare? num demonſtrandi principium ſubſternere? vel ſaltem, quod eodem recidit. Nihil hoc videtur aliud, quam per ſo-

jum genus, adhibitâ nullâ differentiâ definire, tali pacto: identitas rationis est identitas respectûs; eandem rationem habent, quæ habent eundem respectum. Num obtestor hujusmodi definitio censeri meretur perfecta? Secundò, similitudo vel identitas respectûs vocabula perquam æquivoca sunt, & significationis incertæ, nullum audientis animo distinctum conceptum impaimentia. Multæ siquidem similitudinis & identitatis species, multi gradus sunt. Ergò nisi distinctio quædam ulterior excogitetur (hoc est, nisi passio quædam hac notior & specialior adsciscatur) ex hoc vocabulo nil elucebit. Quare definitiones laxis hujusmodi terminis constantes nihil explicant, inutiles & minime scientificæ sunt. Tertiò, asymmetra quanta quo modo se respiciunt, vix comprehendi potest aut explicari; non ergò quid sit illa simili vel eodem se modo respicere, perspici potest immediatè; neque quando tali respectûs similitudine sunt affecta dignosci. Videatur Borellus his oppositam Tacqueti responsionem impugnans, nam mihi deproperandum. Ex his verò consectatur quartò, quòd quæ de proportionalibus vel assumant axiomata, vel demonstrare præ se ferunt theoremata qui huic methodo insistunt, illa nec assumi rectè, nec verè demonstrari. Nam quomodo sumi vel probari potest aliquid proportionalibus competere, quum ipsum quid sit esse proportionalia nondum certò constet, aut clarè concipiatur? Quare nullo fundamento nititur hæc methodus, & quasi de nihilo tractat. Ut præteream, quod adeò multa gratis

tis arripere, vel indemonſtrata petere, & quaſi emendicare, Geometriæ dignitati nonnihil deroget, & nimiam inferat Matheſi licentiam. His adjicio quinto, quòd hujuſmodi definitiones nequeunt ſpecialibus materiis adaptari; ſed earum proportionalitas per intermedias, eaſque bene prolixis & intricatis ratiociniis fultas concluſiones demonſtratur. Ut patebit Tacquetianam primæ vel ultimæ propoſ. Elem. VI. demonſtrationem inſpectanti. Non ibi proportionalium definitio citata comparet, ſed alia propoſitio, propria Tacqueto, ab eo alibi longo (illóque indirecto & apagogico diſcurſu) comprobata. Quod mihi ſignum videtur haud dubium incommodæ, & imperfectæ definitionis præſtratæ, methodíque parum ſcientificæ. His defectibus breviter animadverſis, obnoxia videtur methodus Tacqueti; quorum nullus Euclideæ doctrinæ poteſt objectari. Nihil iſthic nugatorium, ambiguum, incomprehenſibile; recto pede procedunt, firmo tibicine fulciuntur omnia, pauciſſimæ præſtruuntur hypotheſes; & denique (quod præſtantiſſimæ definitionis optimum eſt judicium) ſpecialium materiarum analogiæ immediato directóque diſcurſu ex ipſis ejus viſceribus derivantur; ut patebit omnes in elementis, aut alibi proſtantes ejus adplicationes, & nominatim allegatas libri ſexti propoſitiones conſulenti. Verùm adhuc obiter adnotabo, quòd A. Tacqueti methodum attinet, eum longè (meo quidem judicio) conſultiùs facturum, ſi per illud quod aſſert, & qualitercunque demonſtrat, proportionalitatis indicium definiviſſet ipſa pro- *Part 2. th. 5.*

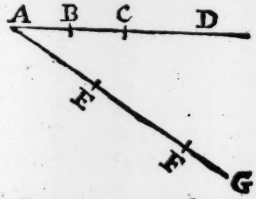
proportionalia ; nec non ejuſce definitionis ſubſidio reliquas (quod opinor potuit, & ipſe ſe potuiſſe profitetur) proportionalium affectiones demonſtrâſſet. Id agens Euclidem ſuiſſet æmulatus, & ſcientificâ viâ proceſſiſſet, incommodæ quæ attigimus pleraque devitâſſet, & eodem quo Euclides modo defendi potuiſſet. Cui affinem ego (quanquam ut videtur aliquanto faciliorem) hanc proportionalium affectionem exhibeo, quâ ſubnititur hujuſmodi definitio. Proportionalia quanta dicantur, cum antecedentes in conſequentium æquemultiplicibus (vel conſequentes in antecedentium æquemultiplicibus) quibuſvis æquali numero continentur (vel illa ab his æque toties auferri poſſunt). E cujuſmodi quidem definitione tota proportionalium doctrina non difficilè poſſet extrui, juxta progreſſum Euclideo perſimilem, attamen ut exiſtimo nequaquam eo ſuccinctiorem aut dilucidiorem. Cui ſaltem objici poſſet, quicquid Euclideæ methodo objectatur ; neque non aliquid fortaſſis præterea, è quantorum aſymmetria petitum, à quo liberior eſt Euclidea doctrina : quapropter operæ pretium eſſe non lentio quicquam innovare. Tacqueto jam, & cum eo ſentientibus dimiſſis D. Hobbii methodum quaſi per transennam inſpectabo. Analogiam is ita definit (ipſo judice perquam accuratè) ratio Geometrica rationi Geometricæ eadem eſt, quando cauſa aliqua æqualibus temporibus æqualia, faciens utramque rationem determinans eadem aſſignari poteſt. De qua definitione temperare mihi nequeo quin dicam, & quis omnia Mathematicorum (veterum, re-

De Corp. 13. § 6. *Dial.* 2. p. 49.

recentiorum (ſcrinia pervolutet, nuſquam opinor comperiet ullam rei, quam illuſtrandam accipit, offuſcandæ magis comparatam, nullam pluribus & gravioribus vitiis laborantem. Nam & intellectu difficilis ac anceps eſt (adeò quidem ut mihi conſtet ab authore ſuo non penitus intellectam) & à propoſito commiſcet admodum aliena; & neſcio an ullis (certè perpaucis) materiis accommodari poteſt; & quæ illi ſuperſtruitur doctrina tota ſic infirma, confuſa, præpoſtera (nec non in aliquibus magni momenti falſa) nihil ut uſquam ſimile præſtitum viderim in Mathematicis. Illam certè (Phyſicam potiùs quàm Mathematicam) definitionem dum excutio, nihil video quod probem, nihil ferè quod improbem, adeo nihil explicitum continet aut evolutum. Quid ſit rationem ab aliqua cauſa determinari, vel quomodo determinetur, haud explicat, & per ſe ſatis obſcurum eſt. Cur eandem cauſam ingerat, non liquet (cùm ſæpiùs etiam rationum ſingularum homogenei termini diverſimodis cauſis procreentur; & rationum collatarum termini ſæpiùs itidem heterogenei ſint, nulliſque proinde cauſis iiſdem determinabiles videantur) cur iſta cauſa determinans rigido jure teneatur uniformiter agere, vel æqualia temporibus æqualibus effecta producere (cùm rationes quantorum inæquali quantumvis impetu productorum æquari poſſint) haud adeò cuilibet in propatulo. Quamobrem deinde rationum æqualium expoſitioni generalis particularis interveniat temporum conſideratio, perſpici cequit Id certè conſtat nihil horum ad

ana-

analogiam necessariò pertinere vel accedere. Cùm e.g. dico duo quanta suis æquemultiplis proportionari, quænam isthic rogo causæ cujusvis facientis æqualia temporibus æqualibus incidat mentio, nisi perquam impertinenter & importunè? Cum sphæram & cylindrum ei circumscriptam proportionales enuncio bassi vel assi, quàm oro fuerit in promptu causa comminisci, quæ temporibus iisdem æqualia patrans facinora rationes istas determinet corporum, & ponderum, vel numerorum? Imò cùm ostendere cupio duo tempora duobus spatiis proportionalia fore, quænam causa temporibus æqualibus æqualia conficiens has unquam determinabit rationes? num propositorum temporum ratio determinabitur ab ipsis hisce vel ab aliis temporibus? Sed andabata sum, & in obscuro specu dimico. Quod ad definitionis applicationem spectat, nec in ea quicquam extra meras tenebras, confusiones, discrepantias, comperio. Prima super hac base fundata propositio sic habet:



Sint à puncto A moto uniformiter descriptæ duæ lineæ AD, AG; earum partes omnes contemporaneæ erunt binæ binis proportionales: hoc est, si AB, AF, & AC, AE, describantur iisdem temporibus, erunt AB, AC ipsis AE, AF proportionales. Id quod ex hac definitione (succinctiùs

ctiùs & clariùs ejus ratiocinium exhibendo) sic infert : Quoniam velocitas in AD, ob uniformitatem motûs, est semper eadem, ratio τȣ̃ AB ad AC determinatur ex sola temporum differentia. Nec non ex pari causa ipsorum AE, AF ratio determinatur ex differentia temporum. Eadem verò tempora sunt hinc inde, & eadem proinde temporum differentia. Ergo eadem causa determinans has rationes assignatur (hactenus aliquid assequor ; at porrò subjicit) causa verò quæ rationem utriusque sic determinat, æqualia efficit temporibus æqualibus ; est enim motus uniformis (hîc incipio cæcutire, & cespitare, priùs pro causa determinante temporum assignabatur differentia ; jam verò, quoniam absonum videbatur differentiam temporum æqualia facere temporibus æqualibus) alia causa substituitur motûs uniformis ; quamvis nec hîc unicus, at duo saltem motus uniformes habentur. Num hæc consentiunt sibi ? num aliquid liquidò conficiunt ? num suam ipse definitionem assequitur, aut applicare novit ? Sed utcunque concludit ; itaque per definitionem proximè præcedentem AB ad AC, & AE ad AF, sunt proportionales). Ex hoc particulari, talitérque demonstrato theoremate, generalia de proportionalibus theoremata ; generales complectentia proportionalium affectiones, pleraque cum illis eadem, quæ in quinto habentur elemento, ceu corollaria videri vult deducere : quis hoc ferat, ex uno exemplo generalem adstrui doctrinam ; quæ de duabus lineis, duobúsque temporibus utcunque possent ostendi, ea statim ad omnes extendi ma-

materias? Quasi verò proportionalitas omnis in solis temporibus, & uniformi motu peractis spatiis versaretur & consisteret? ut alia conticescam hujus methodi parum firma vel sana. [Nempe videtur huic accidisse viro, quod illis consuevit evenire, qui cùm diutiùs in rem aliquam vivido colore tinctam oculorum intenderint aciem, omnia videntur isto colore diluta conspicari: ita videtur hic Philosophus iis quæ de motu æquabili Galilæus conscripsit intentior, aut aliàs Physicorum in motuum contemplatione defixus, ad præconceptas quasdam de motu species, quæ magnitudinem & quantitatem spectant omnia retuliſſe. Sed in omni re, prout vulgò fertur, Qui pauca respicit malè judicat.] Hæc cum ita se habeant, non est quòd novellam hanc methodum ullatenus moremur. Enimverò fiet injuria doctrinæ Euclideæ, si cum hac conferatur tam imbecilla tam inepta? Succedit proximè breviter attingenda, quam in opere proponit Geometrico vir eruditissimus. Assumit is definitionis loco, rationes æquales esse, cùm antecedentibus per consequentia divisis quoti sibimet æquantur. Quæ sanè definitio minimè differt ab illa, quam Euclides adhibet in Elem. VII. pro speciali numerorum doctrina. Sed ne proba sit & accurata proportionalitatis universim sumptæ definitio, videntur hæc obstare. Primò, quòd constituta nondum proportionalitatis doctrina, vel antecedenter ad ipsam difficile conceptu sit quid sit illa divisio quantorum, aut quomodo peragatur; quid nempe sit lineam dividi per lineam, aut corpus per corpus;

pus; quomodo pondus à pondere, tempus a tempore dividatur. Sunt quidem linearum & aliorum quantorum diviſio quædam & multiplicatio, Arithmeticis iſtis (à quibus nomen accipiunt) operationibus affines; aſt quæ definiuntur & peraguntur ex proportionalium inventione, proportionalitatem adeò prænotam ſupponentes. Quinimo communiter apud Arithmeticos ipſa diviſio per analogiam definitur, illam ſcilicet quæ diviſorem inter ac dividendum, unitatem & quotum verſatur. Non igitur tam idonea videtur diviſio, vel ex ea reſultans quotorum æqualitas proportionalitati generatim explicandæ. Dices fortè, ſatis facile concipi quid ſit lineam in linea toties contineri, quoties pondus in pondere, vel tempus in tempore; nec aliud hîc intelligi. Rectè fateor; ſed ad hoc requiritur, ut rationum inter ſe collatarum termini numeris repræſententur; id quod alterum fundat adverſus hanc methodum argumentum; nempe ſecundò, quòd proportionalitatem ſolis numeris alligare videatur; & quantorum rationes haud aliter inter ſe comparabiles ſtatuit, niſi quatenus ipſa quanta numeris denominantur. Quoties enim unum in altero continetur diſpicere, nil aliud eſt quàm ipſorum in numeris proportionem exhibere, vel ea numeris denominare. Verùm etſi quanta nullis repræſententur, aut exprimantur numeris (nec fortè repræſentari poſſint vel exprimi) tamen ipſorum rationes exhiberi, proportionalitates innoteſcere poſſunt, Euclideâ vel conſimili methodo. Cùmque quantis immediatè conveniat ut talibus, & non ut ea nu-

numeris accidit ſignificari, rationes ad ſe mutuas habere, rationibúſque conſequenter inter ſe comparari, rei naturæ convenientius videtur, ut hæc generali modo determinentur, à numeris potiùs abſtracta quam iis ſubjecta. Porrò tertio, quando rationum comparatarum termini ſunt aſymmetri, conſequentes in antecedentibus non continentur aliquoties, adeoque peragi nequeunt accuratæ diviſiones, nec ulli diſtinctè comprehenſibiles quoti exhiberi. Quoti verò ſub confuſione quadam imaginarii, quando vel quomodo ſibimet æquentur, haud ita fuerit in promptu diſcernere, vel ἀπολελιγμένως oſtendere. Quare vix poterit hæc definitio ſpeciales ad uſus accommodari, quæ definitionis eſt imperfectio ferè potiſſima. Breviter, quæ contra Tacqueti methodum diſputata ſunt, adversùs hanc æquè militant, abea vix aut ne vix reipsâ diſcrepantem. Sed enim aliam præclarus idem vir definitionem innuit; *Si quis* (inquit) *tamen mallet affectioni alicujus opem in auxilium advocare, quo demonſtrationes commodiùs procedant, ego nullam potiorem novi hâc; ſi quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto à mediis, & contrà.* De quo nihil ampliùs dicam, quàm propoſitam iſtam affectionem non eſſe generalem, & proportionalibus (juxta nomen receptum) adæquatum. Ductus enim & multiplicatio numeris in ſe, vel in alia quanta propriè ſolis convenit; proximè per ſimilitudinem quandam lineis in ſe, vel in ſuperficies per motum parallelum. Sed lineas in corpora, pondera in tempora duci ſeu multiplicari, quis concepe-

rit?

rit? Sint duo pondera A, B duobus temporibus Y, Z proportionalia, dic mihi quid proveniat ex pondere A ducto in tempus Z, nil prorsus imaginabile. Non ergò strictè quadrat hæc affectio proportionalitati generatim definiendæ; numerorum saltem & linearum, proportionalitati qualitercunque determinandæ possit inservire. Sed jam ultimò restat, ut de Borelli methodo feramus sententiam; & nè tanti viri meritis detrahere videamur, agnoscimus ultrò primùm doctrinam ejus, quantùm percipimus, admodum esse firmam, & bene fundatam. Fatemur ab eo proportionalium affectiones præcipuas è suis ipsius definitionibus ac principiis ritè deductas esse, probéque demonstratas. Non abnuimus ejus methodum in se spectatam satìs esse pulchram & elegantem, nec non à candidis ingeniis, si nulla daretur alia, haberi posse pro sufficiente, & satìs absoluta. Veruntamen eam cum Euclidea comparando quosdam in illo fas sit egregio inspersos deprendere corpore nævos; cúmque pleraque non displiceant, hæc utcunque minùs arrident. Primò, quòd cùm æqualitas omnigenis quantorum rationibus (ῥήτοις καὶ ἀῤῥήτοις) æquè conveniat, eíque congruant universalia quædam symptomata, non tamen hîc ea simul omnis universim, sed ritu τῶν πρὸς ἕν (quæ vocat Philosophus) particulatim & per species successivè definitur. Nam primò rationum effabilium æqualitas ex suo quodam attributo speciali definitur, tum ex ea major & minor rationes effabiles; tum ex his tandem rationum ἀῤῥήτων æqualitas. Quorsum hæ generalis subjecti distractiones,

&

& per inferiora circuitus, si dari potest, & quidem exhibetur ab Euclide rationum æqualium omnigenarum (ut & inæqualium) proprietas aliqua generalis, ex qua possunt universaliter definiri? Si deprehendi poterit animalitatis in genere quæpiam essentialis proprietas an non ex illa præstat (rei naturæ, scientiæ genio, bonæ Logicæ regulis exactiùs quadrat) animalitatem unâ vice simul integram, quàm animalitatem hominis, & animalitatem bruti seorsim, unam ex alia definire? mihi certè videtur. Secundò, minùs placet quòd ineffabilium rationum æqualitas negativè definitur, ac ita quidem ut præmissas supponat & præcognitas inæqualium rationum definitiones. Nam universim definitionibus negativis præpollere censentur positivæ, seu perfectiorem, nobiliorem, & clariorem rerum notitiam progignentes. Tum præposterum videtur ex inæqualitate de æqualitate statuere; quum hæc illâ prior, simplicior, stabilior videatur, & in se penitùs indivisibilis sit. Unde veteres; Nicomachus, Ἡ ἰσότης ἀόριστός τις καθ' ἑαυτὴν καὶ ἀδιαίρετος. Damascius, Στάζει τινὶ ἡ ἰσότης ἀναλογεῖ. Theon Smyrnæus, Ὁ δὲ ἰσότητος λόγος ἀρχικός, καὶ πρῶτός ἐστι καὶ στοιχεῖον πάντων τῶν εἰρημένων λόγων, καὶ τῶν καθ' αὑτὰς ἀναλογῶν. Itaque rationum æqualitas inaqualitati postponi videtur immeritò, pérque illam statui dijudicanda. Annon rectiùs Euclides æqualitatem primò per affectionem quandam positivam, & inæqualitatem respondenter ex alia contraria proprietate definivit? Tertiò adverto, prolixitatem hujusce doctrinæ, quæ per longiuscularum de-

Nicom. l. 2.
Vide Bull. notis in Theon. p. 273.
Theon. c. 51

definitionum ambages vix illud assequitur (ut rationum scilicet æqualitatem ab ipsarum inæqualitate diſterminet) quod duabus tantùm (iisque si rem bene perpendamus multò brevioribus & simplicioribus) exequitur Euclides. Idem observari potest in toto doctrinarum processu, ubique multò paucioribus syllogismis rem conficit Euclides. Porrò quarto, adnoto Borellianas propositiones ac demonstrationes inspicienti compertum iri, quod in illa sua methodo præcipua proportionalitatum symptomata, non nisi per discursus eliciuntur obliquos & apogogicos. Id quod nimis arguit principia non optimè constituta. Certè docet philosophus, & omnes fatentur ejusmodi ratiociniis haud ita perspicuam animóque blandientem comparari scientiam. Neque mirum e definitionum negativarum fontibus anfractuosas promanare demonstrationes. Annon præhabendus Euclides eadem è definitionibus positivis immediato directóque colligens ratiocinio? Quintò, mihi potissimùm displicet & vitio vertitur harum definitionum ad speciales materias accommodatio; vel potiùs quòd ad eas commode nequeunt applicari. Nec enim definitionum ope statim innotescit, aut ex iis prompte deducitur rerum proportionalitas, sed ex intermediis propositionibus, iisque non adeò comprehensu facilibus, & per indirectam argumentationem comprobatis demonstratur. Inspicite sultis demonstrationes primi postremíque theorematis Elementi sexti, quæ apud Borellum sunt prima quarti & secunda quinti, rem ita

comperietis habere; neque non fortaſſe mecum judicabitis haud rectè à Borello doctrinæ ſuæ præ Euclidea evidentiam jactitari. Etenim evidentia doctrinæ præcipuè comparet, & conſiſtit in uſu, facilique definitionum primarum ad ſingulas aut ſpeciales materias adaptabilitate; nec ulla major eſt harum virtus, quàm ut immediatè conſtare poſſit, eas rebus ſubjectis convenire. De ſuis hoc clariſſimè monſtravit Euclides, non ita de ſuis Borellus. Quidni pronunciemus igitur ab illo præſtita hujus conatibus, utlibet egregiis, anteſtare. Hæc breviter animadverti non ut laudi quicquam derogarem præclari viri, ſed ut Euclideæ doctrinæ præſtantiam illuſtrarem, unáque Geometras veteres illam amplexos, illi acquieſcentes defenderem, auguſtiſſimum imprimis Mathematicorum principem Archimedem illi ſuum calculum apponentem, illum quoties uſus poſtulat uſurpantem. Quin addo, & cum hoc elogio præfixam hanc diſputationem claudo, nihil extare (me judice) in toto Elementorum opere proportionalitatum doctrinam ſubtiliùs inventum, ſolidiùs ſtabilitum, accuratiùs pertractatum. Id quod mihi cùm hanc ingrederer de rationibus & analogiis σκέψιν ac θεωρίαν præcipuè fuit in animo declarare. Quà jam operâ non indiligenter perfecto ſecedendum eſt; ut tamen doleat mihi præter ſpem ac propoſitum accidiſſe, quòd neque totam hanc proportionalis materiam exhaurire potuerim; neque quæ de magnitudinum determinatione, ſimilitudine, genera-

tione

tione ſuccurrebant dictu forſan haud inutilia, nec injucunda proponere. Reſervanda proinde vel ſupprimenda pro capiendo poſſe modum conſilio. Vos interim auditores optimi à bono Deo valete.

FINIS.

ISAACI BARROW

Mathematicæ Professoris Lucasiani

LECTIONES

Habitæ in Scholis Publicis

Academiæ Cantabrigiensis.

Incerti temporis hæ sunt ultimæ Lectiones, neque aliquem ad annum affixæ.

LONDINI,
Typis *J. Playford*, pro *Georgio Wells*
in Cœmeterio D. *Pauli*. 1684.

MATHEMATICI PROFESSORIS LECTIONES.

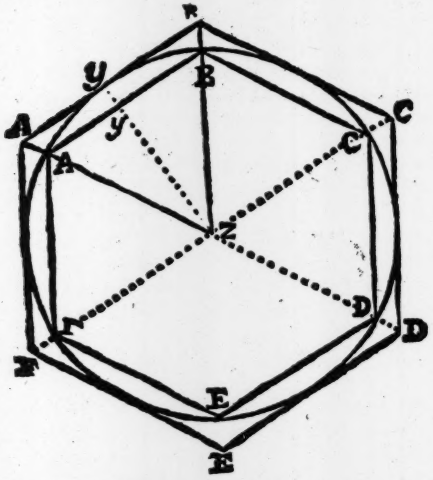
LECT. I.

PRopoſitum eſt nobis methodum exponere, qui Archimedes præclara ſua theoremata, libris qui extant comprehenſa, adinvenit, ſubtiliſſimæ mentis illius utcunq; veſtigia perſequendo. Conabimur autem id efficere ſingulas materias ad problemata revocando, qualia nimirum ille ſibi ſolvenda proponebat, & è quorum ſolutione cùm theoremata ſua, tum ipſorum demonſtrationes, deducebat. (Unde patebit qualem analyſin, & quàm noſtræ modernæ ſimilem exercuerit.)

PROBL. I.
De Circuli Dimenſione.

Ordinatæ figuræ (ABCDEF) circulo inſcriptæ vel circumſcriptæ, par triangulum

(aut parallelogrammum) rectangulum invenire.



Ab Z circuli centro ducatur ZY perpendicularis ad unum quodvis figuræ latus AB, & connectantur rectæ ZA, ZB. * Evidens est triangulum AZB æquari rectangulo ab ZY & ½AB. Similitérque resolvendo totam figuram in ejusmodi triangula (ipsi scilicet AZB & sibi mutuò æquilatera) singula æquabuntur rectangulo ex dimidia sua basi, & altitudine æquali τῇ ZY. Unde simul omnia æquabuntur rectangulo ex dimidia perimetro figuræ, & ZY. Vel triangulo, cujus basis est tota perimeter, altitudo ZY. Quod est

* 41. 1 Elem.

THEOR. I.

Figura regularis circulo inscripta vel circumscripta, æquatur dimidio rectangulo ex

Pe-

perimetro & perpendiculari, à centro ad unum latus; vel triangulo, cujus basis æquatur perimetro figuræ, altitudo dictæ perpendiculari.

Nota] In figura circumscripta perpendicularis est radius circuli.

PROBL. II.

Invenire rectangulum (vel triangulum) æquale circulo.

Ponatur circulum esse figuram regularem, habentem latera indefinitè multa, & parva; & consequenter perimetrum circumferentiæ perpendicularem, è centro ad hæc latera, radio coincidere; hinc igitur, juxta præcedens,

THEOR. II.

Circulus æquatur dimidio rectangulo ex circumferentia & radio. (Vel triangulo, cujus basis æquatur circumferentiæ, altitudo radio.)

Hoc est, posito (ut semper posthac) circumferentiam vocari π, & radium R (vel r) & diametrum δ (vel D) $\odot = \frac{r\pi}{2} = \frac{\delta\pi}{4}$.

Corollaria circulorum circumferentiæ se habent ut radii. Nam hoc similium figurarum, circulis inscriptarum aut circumscriptarum, competere perimetris, in * Elementis demonstratur. * Cor. I. 12

Secundùm indivisibilium hypothesin hoc theorema facilè sic ostenditur:

Super

Super AB, circuli BFG radium, erigatur perpendicularis BC æqualis circumferentiæ circuli BFG, & connectatur AC. Tum in AB ſumendo quodvis pro lubitu punctum D, centro A per D deſcribatur circulus DHK; & ducatur DE ad BC parallela. Eſtque circumferentia BFG ad DHK [a], ut radius AB ad AD, hoc eſt [b], ut BC ad ED. Ergò quum circumferentia [c] BFG = BC, [d] erit circumferentia DHK = DE. Et ſimili ratione circumferentiæ omnes concentricæ conſtituentes

[a] *Cor. præc.*
[b] 4.6.
[c] *Hyp.*
[d] 14.5.

tes circulum BFG æquantur parallelis rectis, quibus conflat triangulum ABC. Unde circulus BFG triangulo ABC æquatur.

COROLL.

Simili discursu, sector quilibet circuli æquatur dimidio rectangulo ex arcu sectoris & radio circuli.

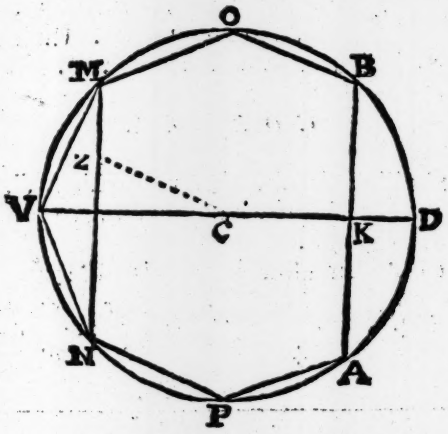
Coroll. circuli cujus radius est M, area est $\frac{\pi}{\delta}$Mq. Nam $\frac{\delta\delta}{4}$(rr). mm :: $\frac{\delta\pi}{4}$ :: $\frac{\pi}{\delta}$ mm. *Cor.* 2. 12.

LECT. II.

De Sphæra & Cylindro.

Quæ de sphæra investigavit Archimedes, vel ad superficiem sphæricam pertinent vel ad soliditatem. De superficie primò disputiemus.

Sit



Sit circuli portio BVA, cujus axis VK tranſiens per circuli centrum C, & baſim BA biſecans in K. Portioni autem inſcribatur figura parilatera & æquilatera VMN PBA. Conſideravit Archimedes, quid ſi circa axem VD circumrotetur portio cum inſcripta figura, deſcriptura ſit circuli portio ſphæricam portionem; figura verò ſolida conſtans cono MVN, & fruſtis conicis (vel cylindricis) OMPN, BOPA per circulos parallelos MN, OP, BA comprehenſis; adeòque ſuperficiem corporis inſcripti è ſuperficiebus conſtare conicis vel cylindricis MVN, OMNP, BOPA. Dein advertit, quò magis laterum figuræ multitudo augetur, eò magis figuram planam ad circulum, & ſolidam ad ſphæram, & ſolidi ſuperficiem ad ſuperficiem ſphæricam accedere; adeò quidem ut latera multiplicando perveniri tandem poſſit ad figuram, cujus ſuperficies minori differat à

ſphæ-

ſphæricæ portionis ſuperficie quàm aſſignato quolibet utlibet minimo defectu; adeóque ſphæræ ſuperficiem quodammodo haberi poſſe pro ejuſmodi figura indefinitam habente laterum multitudine; & cujus diſtantiam (CZ) à centro ſphæræ minimè differat à radio ſphæræ, vel in eum definat. Tandem igitur ſecum animo reputavit, ſi poſſet hujuſmodi figuræ ſuperficiem ad planam aliquam figuram, puta circulum, ſub generali qualibet ratione referre, inde ſibi conſtiturum quam ad planam talem figuram obtineret relationem ſphærica ſuperficies. Hoc perſcrutari aggreſſus eſt feliciter, hæc quæ ſequuntur problemata reſolvendo.

PROBL. I.

Invenire rectangulum æquale * laterali priſmatis erecti ſuperficiei.

* *Hoc eſt, baſibus exceptis.*

Manifeſtum eſt ſingulum parallelogrammum, eorum quibus conſtat lateralis priſmatis ſuperficies eſſe rectangulum ex latere priſmatis, & uno latere baſis; & proinde omnium illorum parallelogrammorum aggregatum: hoc eſt,

Lateralis erecti priſmatis ſuperficies, æquatur rectangulo ex latere priſmatis, & baſis perimetro. *Theor. I.*

PROBL. II.

Invenire rectangulum æquale * curvæ recti cylindri ſuperficiei.

* *Hoc eſt, demptis baſibus.*

Supponatur cylindrum eſſe priſma quoddam ſuper polygonam baſem, latera habentem

tem indefinitè parva & multa (hoc est, super circulum) & ex præcedentibus liquet, quod

Theor. II. Curva recti cylindri superficies æquatur rectangulo ex latere ejus, & circumf. basis.

Coroll. 1. hinc. Curva cylindri superficies se habet ad basim ejusdem, ut latus cylindri ad semidiam radii, vel ut duplum lateris ad radium.

Sit enim L = lateri. Estque (ex hoc) $L\pi$ = superficiei, ac basis est $\frac{r\pi}{2}$. Atqui $L\pi$.

* 1.6. $\frac{r\pi}{2}$ :: * l. $\frac{r}{2}$ :: 2l.r.

Coroll. 2 etiam hinc. Superficies cylindrorum super basibus iisdem (vel æqualibus) sese habent ut latera: & habentium eadem vel æqualia latera, superficies sunt ut circumferentiæ basium, vel ut diametri, vel ut radii basium.

PROBL. III.

Invenire circulum æqualem datæ curvæ cylindri recti superficiei.

e 1 *Cor.* 2. *hujus.* Sit A radius quæsiti circuli. e Estque ⊙ rad. A. ⊙ rad. R. :: 2L. R. f Hoc est, Aq.

f *Cor.* 2. 12 Rq. :: 2L. R :: g 2LR. Rq. Quare Aq h =

g 1.5. 2LR. i Unde } 2L. A :: A. R.

h 9.5. vel } L. A :: A. 2R.

i 17.6. Hinc,

Theor. III. Radius (A) circuli æqualis superficiei cylindri est media proportionalis inter latus

Archi. 13. *l.* cylindri (L) & basis diametrum (2R).

k 17.6. Nam (retrograde) quia L. A :: A. 2R erit

l 1.6. k 2LR = Aq. Sed 2L. R l :: 2LR. Rq. m Er-

m 7.5. gò 2L. R :: Aq. Rq n :: ⊙ rad. A. ⊙ rad. R.

n *Cor.* 2. 12 Unde

Unde per Coroll. 1. præcedentis erit ⊙ rad. A æqualis ſuperficiei cylindri. Q.E.D.

PROBL. IV.

Invenire rectangulum æquale laterali pyramidis æquilateræ, ſuper regulari baſe conſtitutæ, ſuperficiei.

Liquidò patet, ſingulum pyramidis ſuperficiem componens triangulum, æquari ipſius altitudini ductæ in dimidiam baſin. Unde triangulorum omnium aggregatum, hoc eſt,

Lateralis æquilateræ pyramidis ſuperficies æquatur communi triangulorum eam componentium altitudini ductæ in dimidiam baſis perimetrum. *Theor. IV.*

PROBL. V.

Invenire rectangulum æquale curvæ recti coni ſuperficiei.

Conus ſupponatur æquilatera pyramis ſuper regulari baſe indefinitè multilatera (hoc eſt, circulari) & conſequenter habens altitudinem triangulorum aſſurgentium æqualem lateri coni. Hinc ex præc.

Recti coni curva ſuperficies æquatur rectangulo ex latere coni, & dimidia circumferentia baſis. *Theor. V. Archim. 15. I.*

Coroll. 1. Curva coni ſuperficies ſe habet ad baſin ejuſdem, ut latus coni ad radium baſis.

Nam coni ſuperficies eſt $\frac{L\pi}{2}$; & baſis eſt $\frac{R\pi}{2}$. * Verùm $\frac{L\pi}{2} . \frac{R\pi}{2} :: L . R.$ co- * 1.6.

Coroll. 2. Superficies conorum ſuper eadem baſi (vel æqualibus) ſe habent, ut latera. Et ſuperficies conorum habentium æqualia latera, ſe habent ut radii baſium.

PROBL. VI.

Circulum invenire parem datæ coni curvæ ſuperficiei.

Sit radius circuli quæſiti A. Quum igitur (ex Coroll. 1. ultim.) ſit ⊙ rad. A. ⊙ rad. R :: L. R. [o] Et id o Aq. Rq :: L. R. [p] :: LR. Rq. [q] Erit Aq = LR. [r] Quare L. A. :: A R.

[o] *Cor.* 2.12
[p] 1.6.
[q] 9.5.
[r] 17 6.

Hinc,

Theor. VI. Archim. 14. *I.*

Circulus habens radium (A) proportione medium inter coni latus (L) & baſis radium (R) æquatur curvæ coni ſuperficiei.

[f] *Hyp.*
[t] 1.6.
[u] 7.5.
[x] *Cor.* 2.12.

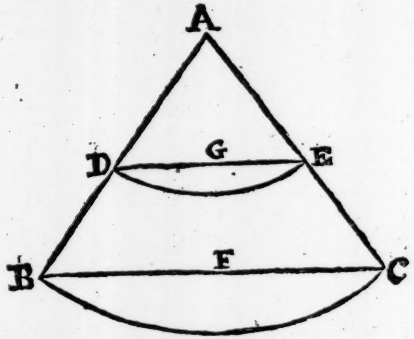
Nam quia L. A :: [f] A. R, erit LR = Aq. Verùm L. R :: [t] LR. Rq. [u] Ergò L. R :: Aq. Rq :: [x] ⊙ rad. A. ⊙ rad. R. Ergò (ex Coroll. 1. præc.) eſt ⊙ rad. A. æqualis ſuperficiei coni. Q. E. D.

PROBL. VII.

In cono recto (ABC) invenire circulum æqualem ſuperficiei conicæ (DBCE) interceptæ planis parallelis (BC, DE).

Nota] Supponitur ABC triangulum per axem; & BC, DE communes hujus ſectiones cum planis parallelis. Unde BC, DE ſunt parallelæ per 16.11.

Po-



Ponatur L = AB, & R = BF, & M = AD, & R = DG; & quæsiti circuli radius sit A. Et ob AB. BF :: [y] AD. DG, hoc est, L. R :: M. S. Erit LS = [z] MR; & [a] proinde LS — MR = 0.

[y] 4.6.
[z] 16.6.
[a] 3.ax.1.

Jam (per ultimum) superficies ABC æquatur circulo, cui radius $\sqrt{LR}$. Et superficies ADE circulo, cui radius $\sqrt{MS}$. Et [b] consequenter superficies DBCE, vel [c] ⊙ rad. A = ⊙ rad. $\sqrt{LR}$ — ⊙ rad. $\sqrt{MS}$. Unde Aq = LR — MS [d] = LR — MS + LS — MR [e] = L — M × : R + S [f]

[b] *Cor.* 2. 12
[c] *Hyp.*
[d] *Prius.*
[e] *Sch* 1.2.
[f] 16.6.

Square L — M. A :: A. R + S. Unde hoc est, DB. A :: A. BF + DG.

Circulus, habens radium (A) proportione medium inter interceptam parallelis planis (BC, DE) lateris partem (DBVL — M), & summam radiorum (BF + DG, vel R + S) circulorum qui in parllelis planis, æquatur conicæ superficiei (DBCE) parallelis planis interceptæ.

Theor. VII. Archim. 16.1.

Nam (analysis vestigiis insistendo) quia L — M. A [g] :: A. R + S. Erit Aq = LR — MS + LS — MR, Hoc est, Aq = LR — MS [h] (quia

[g] *Hyp.*
[h] 16.6.

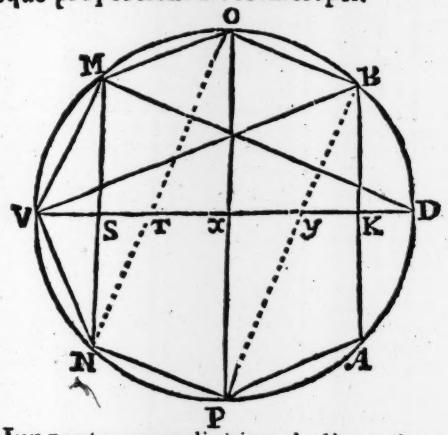
i 6.6. k 16.6. l 3.ax.1. m cor. 2.12 n 6. hujus.

(quia ob L.M :: R.S. k est LS=MR, & l propterea LS—MR=0). m Ergò circulus radio A æquatus differentiæ circulorum, quorum radii √LR & √MS n; id est, differentiæ superficierum conicarum ABC, ADE, id est, superficiei conicæ DBCE. Q.E.D.

PROBL. VIII.

* *Excepta base Archim.* 32.1. 23.

Circuli segmento BVA (cujus axis VKD) inscripta sit figura * parilatera & æquilatera VMNOPBA, & segmento unà cum inscripta figura circa axem VK rotato; invenire circulum æqualem superficiei corporis ab inscriptæ figuræ revolutione procreati, sphæræque proportioni BVA inscripti.



Jungantur anguli hinc indè pariter distantes à vertice V rectis MN, OP, BA; & connectantur NO, PB, ac DM: liquet autem angulos VDM, VMN, MNO, NOP, OPB, PBA, æqualibus insistentes arcubus

o 27.1. æquari; & inde o parallelas esse rectas MN,

MN, OP, BA; a trigona DMV, MSV, NST, OKT, PXY, BKY, ſimilia ſore. P Quare DM. MV :: MS. VS :: NS. ST :: OX. TX :: PX. XY :: BK. YK. q Unde ut DM ad MV, ita ſumma antecedentium MN + OP + BK ad ſummam conſequentium reſpectivam VK. Ergò DM × VK = MV × :: MN + OP + r BK. Jam ſuperficies coni MVN ſ æquatur circulo, cujus radius $\sqrt{VM \times MS}$. Et ſuperficies OMNP t æquatur circulo, cujus radius eſt $\sqrt{\left.\begin{matrix}MO \times : MS + OX.\\ VM\end{matrix}\right\}}$. u Itémque ſuperficies BOPA circulo, cujus radius eſt $\sqrt{\left.\begin{matrix}OB \times OX + BK.\\ VM\end{matrix}\right\}}$. x Ergò tota ſuperficies VMOBAPN æquatur circulo, cujus radius eſt $\sqrt{VM \times : 2\,MS + 2\,OX + KK}$. Hoc eſt, $\sqrt{VM \times : MN + OP + \frac{BA}{2}}$ hoc eſt, $\sqrt{DM \times VK}$. Unde,

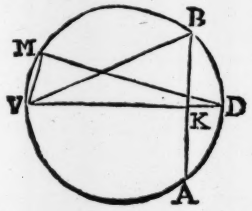
P 4.6. q 12.5. r $\frac{BA}{2}$ ſ 6 *hujus.* t 7 *hujus.* u 1.2. x *Cor.* 2.12

Superficies ſolidi (VMOBAPN) ſphæræ portioni (BVR) inſcripti, produc'íque e revolutione figuræ parilateræ & æquilateræ (VMOBAPN) circuli portioni (BVA) inſcriptæ, æquatur circulo, cujus radius eſt $\sqrt{DM \times VK}$ (exiſtente DM recta, quæ ducitur ab extremo diametri VD, axem VK continentis, ad terminum lateris VM, vertici V contermini) *Theor. VIII*

Coroll. Ducendo VB; quoniam DV × VK = VBq. Et DM □ DV, liquet eſſe DM × VK □ VBq. Et proinde circulum cujus radius eſt $\sqrt{DM \times VK}$, minorem eſſe circulo cujus radius VB; id eſt, ſuperficiem ſolidi cujuſvis modo præmonſtrato deſcripti in ſphæra, minorem eſſe circulo cujus radius VB. *Cor.* 8. & 17. 6.

PROBL. IX.

Circulum invenire parem ſuperficiei portionis ſphæricæ (BVA).



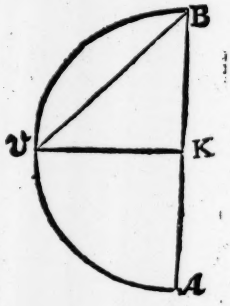
Si circuli ſegmento BVA, è cujus circa axem VK revolutione producta fuit ſphæræ portio, inſcribatur figura parilatera & æquilatera, cujus VM ſit unum latus, & ex iſtius figuræ rotatu producatur figura; ſuperficiem habens conſtantem e ſuperficiebus conicis, aut ex parte cylindricis (ſicut in præcedenti;) manifeſtum eſt ex ultimo Corollario, quòd hujus figuræ ſuperficies minor eſt circulo cujus radius VB; prout autem VM magnitudine minuitur, & conſequenter DM creſcit eò ad æqualitatem magis appropinquat; poſito igitur VM eſſe infinitè (vel indefinitè) parvam, figura plana ſegmento BUA coincidet, & ſolida figura cum ſphæræ portione BVA, & DM cum DV; & proinde ſuperficies inſcripti ſolidi, hoc eſt, ſphæricæ portionis ſuperficies, æquabitur circulo cujus radius VB. Hoc eſt,

Theor. IX. Archim. 36. & 37. I. Superficies ſphæricæ portionis (BVA) æquatur circulo, cujus radius eſt recta (VB) ducta à portionis vertice (V) ad circumferentiam baſis (BA). (Vel cujus radius eſt chorda

chorda ſubtendens dimidium arcum ſegmenti circularis, cujus revolutione ſphæræ portio procreatur).

COROLLARIA.

1. Superficies hemiſphærii (BVA) baſis ſuæ dupla eſt.



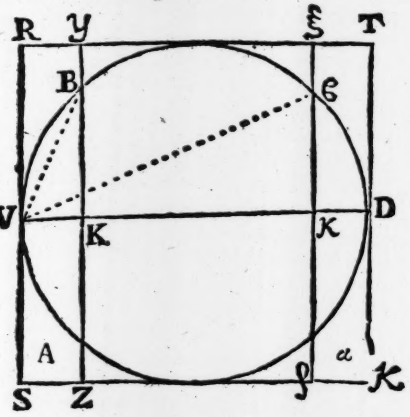
Nam per proximè præcedens ſuperficies hemiſphærii æquatur circulo cujus radius VB, hoc eſt, duplo circulo ad radium VK; quia VBq = VKq + BKq = 2VKq. Unde conſectatur immediatè, quòd

2. Superficies totius ſphæræ quadrupla eſt maximi in ea ſphæra circuli; (vel æqualis circulo, cujus radius æquatur diametro ſphæræ.

Quod nobiliſſimum theorema demonſtrat Archimedes ſeparatim; quod non opus erat ut faceret adeò ſtatim deducitur è generali hoc theoremate. *Archim. 30. I.*

3. Sphæræ ſuperficies æquatur curvæ ſuperficiei cylindri circa ipſam deſcripti, hoc

est, cujus latus & basis diameter æquantur singula diametro sphæræ.



Nam (per 1. Coroll. 2. hujus) curva superficies cylindri se habet ad basin, ut latus ejus ad $\frac{1}{2}$ radii basis, id est, ut diameter ad $\frac{1}{4}$ diametri; id est, ut superficies sphæræ ad maximum in sphæra circulum, vel ad basin cylindri. Ergò cylindri curva superficies æquatur superficiei sphæræ, imò generatim

4. Cujusvis portionis superficies (BVA) æquatur curvæ superficiei cylindri (RSYZ) habentis eandem altitudinem, vel axem (VK) & diametrum (YZ) æqualem sphæræ diametro (VD).

* 3. hujus. Cor. 8. 6. Nam superficies cylindrica RSZY * æquatur circulo cujus radius est $\sqrt{}$ RY × YZ, id est, $\sqrt{}$ VK × VD, id est, $\sqrt{}$ VBq (nam DV. VB :: VB. VK) id est, superficiei portionis sphæricæ BVA.

5. Superficies portionum BVA, BDA se habent ut axes sui BV, BD.

Nam

Nam cylindricæ ſuperficies RSZY, TXZY, quibus hæ ſphæricæ æquantur, taliter ſe habent. Imò, 2 *Cor.* 2. *hujus.*

6. Sphæricarum quarumvis portionum (BVA, ϛVα) ſuperficies axibus ſuis (VK, VK) proportionales ſunt.

Nam & cylindricis ſuperficiebus, quibus æquantur, hoc convenit. 2 *Cor.* 2. *hujus.*

7. Sphærica ſuperficies ϛBAα parallelis planis ϛα, BA intercepta æquatur cylindricæ ſuperficiei ξYZζ iiſdem planis interceptæ.

Nam ſi à cylindrica ſuperficie ξRSζ, cui æquatur ſphærica ſuperficies ϛVα, detrahatur cylindrica ſuperficies YRSZ, cui æquatur ſphærica ſuperficies BVA, remanebit cylindrica ſuperficies ξYZζ æqualis ſphæricæ ſuperficiei ϛBAα. Unde quoque,

8. Zonæ, ſeu ſuperficies ſphæricæ parallelis circulis interceptæ, ſe habent ut axes ſui.

Quin ex hoc fœcundiſſimo theoremate, nobiliſſimo & utiliſſimo inter authoris noſtri inventa, complura deducantur conſectaria. Nobis hæc in præſens ſufficiant, declarandæ methodo, cui author inſiſtebat, in eo reperiendo. Proximâ Lectione, quâ ſolidi tates portionum ſphæricarum ad conos & cylindros retulit, viâ dabimus operam enucleare.

LECT. III.

Methodum poſtremà vice conati ſumus exponere qua Archimedes ſuperficies conicas, cylindricas, & præſertim ſphæricas cum ſuperficiebus planis comparavit, iis æquales circulos aſſignando. Nunc eadem brevitate modum expiſcabimur, quo ſoliditates ſphærarum & ſphæricarum portionum atque ſectorum cum conis & cylindris contulit; aſſumentes imprimis ea quæ in Elementis demonſtrata ſunt, nempe

Conos & cylindros æqualibus inſiſtentibus baſibus ſe habere ut altitudines; & ſi altitudines æquales ſunt, ſe habere ut baſes.

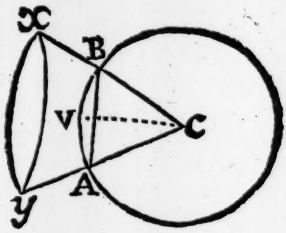
Et ſi coni vel cylindri pares ſunt, baſes & altitudines proportione reciprocari: & inverſè, ſi proportione reciprocantur, ipſos æquari.

Et ſimiles conos ac cylindros in triplicata eſſe ratione laterum, vel radiorum, vel diametrorum baſis.

Et cylindros conorum æquè altorum & ſuper æquali baſe conſtitutorum triplos eſſe. Præmittimus & definitionem unam ac alteram.

1. Solidus ſector (vel ſector ſphæricus) eſt figura comprehenſa ſuperficie coni, verticem habentis in centro ſphæræ, & ſphæricâ ſuperficie intra conum.

Ut

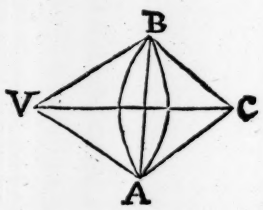


Ut figura BCAV comprehenſa ſub ſuperficie conica BCA, parte ſuperficiei coni XCY, & ſuperficie ſphærica BVA.

Vel eſt figura compoſita è cono CBA (verticem habente in centro ſphæræ C) & portione ſphærica BVA, ſuper eadem baſe BA.

Vel ſi ſector circularis VCB circa radium CV revolvatur, procreabitur ſector ſphæricus BCA.

2. Solidus rhombus eſt figura conſtans duobus conis rectis inverſis, ſuper eadem baſe conſtitutis, & vertices habentibus in eodem communi axe,



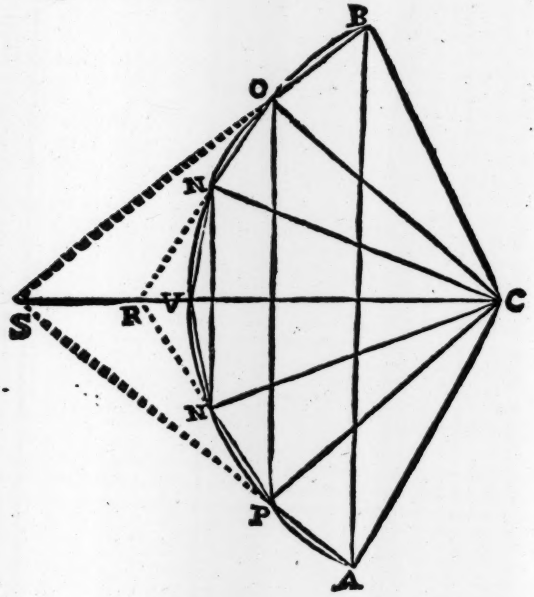
Talis eſt CBVA, cui communis baſis BA & axis VC.

Sit jam ſector circularis * BCV, cui inſcribatur figura æquilatera BOMV, & ſector cum figyra circa radium CV revolvatur, & à ſectore circulari producetur ſector ſphæricus; figura autem corpus ſolidum conſtans primum rhombo MCNV; tum eo quod producitur

* *Minor vel non major quadrante.*

Confer hæc cum præmiſſis in Lectione prima.

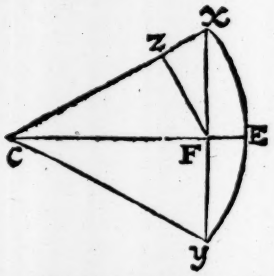
ducitur ex revolutione trianguli OCM, hoc eſt, (productis OM, PN ad occurſum R) ei quod ſupererit, ſi detrahatur rhombus MCNR è rhombo OCPR; eo denique quod fit è revolutione trianguli BCO, hoc eſt, (productis BO, AP ad S) differentiæ rhombi BCAS & OCPS. Itaque ſi ſciri poſſit hujuſmodi cujuſvis figuræ relatio ad conum aliquem, eo forte ratio dignoſcetur ſectoris ſphærici ad conum. Huc collimant ſequentia problemata.



Probl.

PROBL. I.

Invenire conum æqualem dato cono (CXY) cujus basis (Q) æqualis sit curvæ superficiei dati coni (CXY).

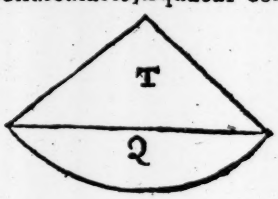


Analysis. Sit T altitudo coni quæsiti, & quia coni XCY, TQ ponuntur æquales, [y] erit ut altitudo CF coni XCY ad T, altitudinem coni TQ, ita reciproce basis Q ad basin XEY; [z] hoc est, superficies XCY ad basin XEY, [a] hoc est, ut latus CX ad radium FX. Ita ut sit CF. T :: CX. FX. Atqui ducendo FZ ad perpendicularem, [b] est CX FX :: CF. FZ (ob similitudinem triangulorum CXF, CFZ). [c] Ergo FZ = T. Hinc,

[y] 15. 12.
[z] *Hyp.* & 7. 5.
[a] *cor.* 5.
[b] 1 *Lect.* 4. 6.
[c] 9 5.

Conus (TQ) cujus basis (Q) æquatur superficiei coni (XCY), & altitudo (T) rectæ (FZ), quæ ducitur à basis centro (F) ad latus (CX) perpendicularis, æquatur cono (CXY).

Thsor I. Archim. 7. I



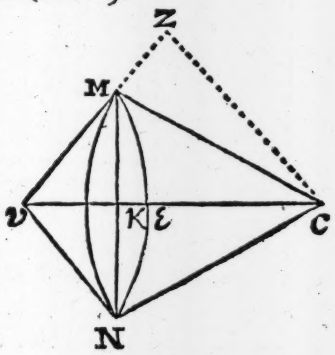
Nam

Nam quia T = [d] FZ, [e] erit CF. T :: CF. FZ :: [f] CX. FX :: [g] superficies XCY, basis XEY :: [h] Q. basis XEY. Ergò altitudo CF ad altitudinem T, ita est reciprocè basis Q ad basin XEY. [i] Quare coni XCY & TQ æquantur. Q.E.D.

d *Hyp.*
e 7.5.
f 4.6.
g *Cor.* 5.
I *Lect.*
h *Hyp.* & 7.5.
i 15.12.

PROBL. II.

Invenire conum æqualem dato rhombo (MCNV) habens basin (Q) æqualem superficiei coni (MVN).



Analysis. Altitudo coni quæsiti sit T, & quia conus MCN, conus MVN :: [k] CK. KV. & componendo rhombus MCNV conus MVN :: CV. KV; hoc est, ut conus cujus basis æquatur basi MEN, & altitudo ipsi CV ad conum MVN; [l] iste conus igitur æquatur rhombo MCNV, [m] hoc est, cono TQ. [n] Unde ut CV ad T, ita reciprocè erit Q ad MEN, [o] id est, superficies MVN ad MEN, [p] id est, VM ad KM, [q] id est, (ductâ CZ ad VM protractam perpendiculari) ut CV ad CZ. [r] Quare T = CZ. Hinc,

k 14.12.
l 8.5.
m *Hyp.*
n 15.12.
o *Hyp.* & 7.5.
p *Cor.* 5.
I *Lect.*
q 4.6.
r 9.5.

Conus

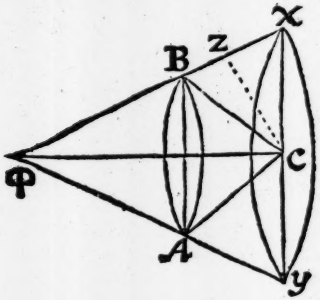
Conus (TZ) cujus basis (Q) æquatur superficiei coni (MVN), & altitudo (T) rectæ (CZ) quæ ducitur à vertice (C) coni (MCN) perpendicularis ad latus (VM) coni (MVN) æquatur rhombo (MCNV). *Theor. II. Archim. 18. I.*

Nam ob T=CZ, [f] erit CV.T :: CV. CZ :: [t] VM. VK :: [u] superficies MVN, basis MEN :: [x] Q.MEN. [y] Unde conus, cujus altitudo æquatur ipsi CV, & basis circulo MEN, æquatur cono TQ (ob reciprocam basium & altitudinum proportionem). Ejusmodi verò conus æqualis [z] ostensus est rhombo MCNV. [a] Ergò conus TQ æquatur rhombo MCNV. Q.E.D.

[f] 7. 5. [t] 4. 6. [u] *Cor.* 5. 1. *Lect.* [x] *Hyp.* & 7. 5. [y] 15. 12. [z] *In analysi.* [a] 1. *ax.* 1.

PROBL. III.

Si rhombus BCAφ detrahatur è cono χφY, invenire conum residuo æqualem, habentem basin (Q) æqualem superficiei χBAY, planis parallelis χY, EA interceptæ.



Coni quæsiti altitudo sit T, & primo hujus) liquet conum, cujus altitudo est CZ (perpendicularis e centro basis ad coni χφY latus φχ) & basis par superficiei χφY æquari cono

cono $X\phi Y$. Item (e ſecundo hujus) conum, cujus altitudo eſt CZ, & baſis par ſuperficiei $B\phi A$, æquari rhombo $BCA\phi$. Unde ſi detrahatur rhombus $BCA\phi$ à cono $X\phi Y$, reſiduum æquabitur cono, cujus itidem altitudo eſt CZ, baſis par reſiduæ ſuperficiei conicæ χBAY, vel circulo Q. Adeóque CZ = T. Hinc,

Theor. III. Archim. 19. 1. Conus (TQ) cujus baſis (Q) æquatur ſuperficiei conicæ (χBAY) parallelis planis χY, BA interceptæ, & altitudo (T) perpendiculari (CZ) ductæ à centro (C) baſis coni ($\chi\phi Y$) ad ejus latus ($\phi\chi$), æqualis eſt differentiæ coni ($\chi\phi Y$) & rhombi ($BCA\phi$).

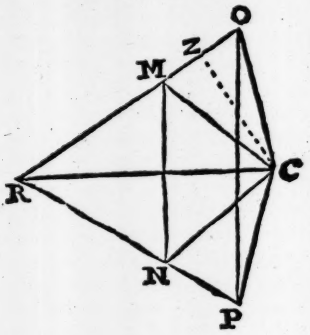
Nam conus, cujus altitudo eſt CZ, & baſis æqualis ſuperficiei conicæ χBAY æquatur differentiæ duorum conorum, habentium communem altitudinem CZ, & baſes æquales ſuperficiebus conicis $\chi\phi Y$, $B\phi A$; * id eſt, differentiæ coni $\chi\phi Y$ & rhombi $BCA\phi$. Unde conus TQ illi differentiæ æquatur. Q.E.D.

* *Per duo poſtrema theoremata.*

PROBL. IV.

Si à rhombo OCPR detrahatur rhombus MCNR, invenire conum reſiduo MOCNP parem, habentem baſin (Q) æqualem conicæ ſuperficiei OMNP, parallelis rhomborum baſibus OP, MN interceptæ.

Sit



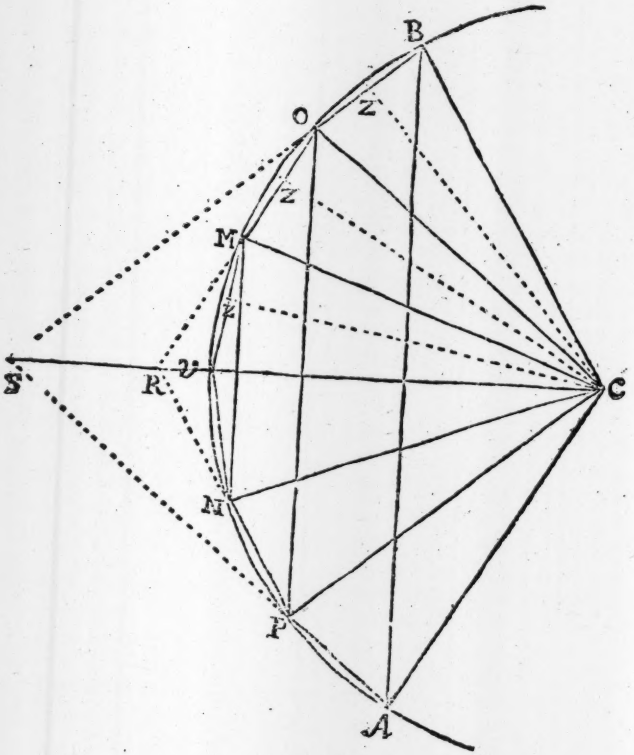
Sit T rurſus altitudo coni quæſiti, erítque (per ſecundum hujus) conus, cujus altitudo CZ, & baſis par ſuperficiei conicæ ORP, æqualis rhombo OCPR. Itémque conus, cujus altitudo eadem CZ, & baſis par ſuperficiei conicæ MRN æquatur rhombo MCNR. Horum conorum differentia eſt conus habens eandem altitudinem CZ. & baſin æqualem differentiæ ſuperficierum illarum, hoc eſt, ſuperficiei OMNP, vel circulo Q. Ergò CZ=T. Unde,

Conus (TQ), cujus baſis (Q) æquatur ſuperficiei conicæ OMNP, parallelis planis OP,MN interceptæ, & altitudo ductæ CZ à vertice C coni OCP ad coni ORP latus (OR) perpendiculari æquatur differentiæ rhomborum OCPR,MCNR. *Theor. IV. Archim. 20. I.*

Nam conus habens altitudinem CZ, & baſin æqualem ſuperficiei conicæ OMNP, æquatur differentiæ duorum conorum, habentium eandem altitudinem CZ, & baſes æquales ſuperficiebus conicis ORP, MRN; * h.e. differentiæ rhombor. OCPR, MCNR. Unde conus TQ iſti differentiæ exæquatur. Q.E.D. *Probl.* * *Per 2. hujus.*

PROBL. V.

Invenire conum æqualem figuræ (qualis est initio Lectionis hujus expositæ) sphæricæ portioni inscriptæ.



A centro C ad latera demittantur perpendiculares CZ ; & quia rhombus MCNV
* 2. hujus. * æquatur cono, cujus altitudo æqualis
est

est τῇ CZ, & basis superficiei coni MVN; & corpus MOCPN, residuum nempe subducto rhombo MCNR è rhombo OCPR æquatur cono, cujus etiam altitudo par est eidem CZ, & basis superficiei conicæ MOPN; item solidum OBCPA, quod restat subducto rhombo OCPS è rhombo BCAS, *æquatur cono, cujus itidem altitudo CZ, & basis æquatur superficiei conicæ OBAP; liquet totam figuram inscriptam æquari cono, cujus altitudo æquatur perpendiculari CZ, & basis toti superficiei figuræ inscriptæ. * 4 *hujus.*

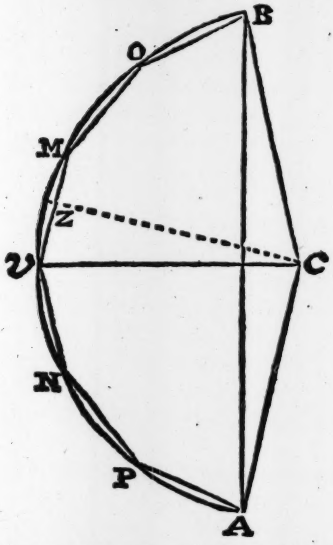
Hinc,

Figura solida (CBOMVNPAC) inscripta sectori sphærico (BCA) (& producta è revolutione figuræ æquilateræ (CVMOBC) sectori circulari (BCV) inscriptæ, circa axem CV rotatu) æquatur cono, cujus altitudo æqualis est perpendiculari (CZ), è centro sectoris ad unum inscriptæ figuræ latus ductæ, & basis superficiei (VMOBAPNV) figuræ solidæ inscriptæ. (Exclusâ scilicet superficie coni BCA). *Theor. 7. Archim.* 34. 1.

Nota]. Procedit hoc de sectore sphærico, qui non major est hemisphærio.

PROBL. VI.

Conum invenire parem sectori sphærico (BCAV).



Si ſectori ſphærico inſcribatur figura VMOBCAPNV, qualem mox deſcripſimus, cujus lateri perpendicularis ſit è centro ducta CZ; liquido conſtat è dictis hanc figuram æquari cono cujus altitudo CZ, baſis æqualis ipſius ſuperficiei VM. BAPNV. Quia verò latus VM minus aſſumi poſſit quavis aſſignabili lineâ, vel indefinitè parvum; adeò ut conſequenter CZ minimè differat à radio ſphæræ, & ſuperficies inſcriptæ figuræ deſignat in ſuperficiem ſphæricam BVA; & ſiura ipſa quaſi tranſeat in ſectorem ſphæricum, ſatis manifeſtum eſt, quod

Theor. VI. Archim. 38. l. Sector ſphæricus æquatur cono, cujus altitudo æquatur radio ſphæræ; baſis autem perficiei ſphæricæ portionis, cui ſector inſiſtit,

Pro-

Procedit de ſectore, qui non eſt hemiſphærio major. At conſectatur etiam de majore. Vide Coroll. 5.

COROLL.

1. Hemiſphærium æquatur cono, cujus baſis æquatur ſuperficiei hemiſphærii (hoc eſt, duplæ hemiſphærii baſi) & altitudo radio ſphæræ. Et, *Archim. 26. 1.*

2. Hemiſphærium duplum eſt coni ſuper eadem baſe, & ſibi æque alti. Et proinde,

3. Hemiſphærium eſt $\frac{2}{3}$ cylindri ſuper eandem baſin, & æque alti. Et conſequenter,

4. Tota ſphæra ſubſeſquialtera eſt cylindri ſibi circumſcripti.

Separatim hoc nobile theorema demonſtravit auctor, quidni meliùs peperciſſet operæ, cùm in iſto generali contineatur, aut ab ea immediate reſultet?

5. Etiam * ſector ſphæræ major hemiſphærio æquatur cono. Cujus altitudo radius ſphæræ, & baſis æqualis ſuperficiei ſuæ ſphæricæ. * Καλαχρηστικῶς dictum.

Nam ſi è cono, cujus altitudo radius ſphæræ, & baſis ſuperficies totius ſphæræ, auferatur conus cui altitudo etiam radius ſphæræ, & baſis ſuperficies minoris portionis, remanebit conus itidem altitudinem habens radium ſphæræ, & baſin æqualem ſuperficiei ſphæricæ reſiduæ; qui proinde par eſt ſectori majori reſiduo.

6. Sphærica portio hemiſphærio minor æquatur cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis æqualis ſuperficiei ſuæ ſphæricæ; minùs cono ſuper eadem baſe verticem habente in centro ſphæræ.

7. Sphærica portio hemiſphærio major ſimili quoque cono æquatur, ſed addendo conum ſuper eadem baſe verticem habente in centro ſphæræ.

Complura deducantur hinc corollaria, circa conos & cylindros ſphæræ inſcriptos; ſed non id agimus, at verò tantùm ut authoris noſtri methodum elucidemus. Et cùm nihil in primo libro notabile reliquerimus intactum, tranſibimus ad ſecundum.

LECT. IV.

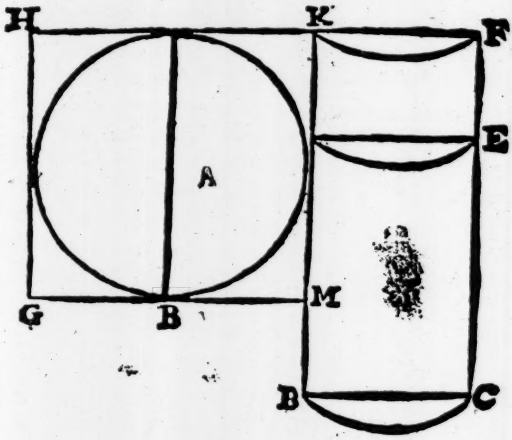
HActenus conati ſumus modum exponere, quo Archimedes præcipua ſua circa ſphæram theoremata inveſtigavit. Et poſſemus hanc principalem aſſequuti ſcopum jam conquieſcere. Verum operæ forſan pretium fuerit analyticam problematum, quæ in ſecundo libro habentur, ſolutionem tradere, quo planiùs appareat, qualem ille ſubtiliſſimus vir analyſin uſurpârit, & quàm hodiernæ noſtræ parum diſſimilem.

LIB. II.

PROBL. I.

Archim. l. Invenire ſphæram æqualem dato cylindro BE.

Sit



Sit D=BC diametro baſis, & L=CE lateri cylindri dati; & A diameter ſphæræ quæſitæ. Jam ſphæræ circumſcriptus concipiatur cylindrus GHKM (habens nempe latus GH, & diametrum baſis GM, utrumque æquale ipſi A). Et liquet è prædictis eſſe cylindrum GHKM [b] $=\frac{3}{2}$ ſphæræ A. Unde ſi fiat CF$=\frac{1}{2}$CE, erit cylindrus BF [c] ($\frac{1}{2}$ cylindri BE) æqualis cylindro GHKM. Unde ut BCq ad GMq [d], ita reciprocè erit GH ad CF; hoc eſt, Dq. Aq :: A. $\frac{1}{2}$L. Unde $\frac{Acub}{Dq} = \frac{1}{2}L$. Atqui D, A, $\frac{Aq}{D}$, $\frac{Acub}{Dq}$ ſunt $\div\div$. Ergò D, A, $\frac{Aq}{D}$ $\frac{1}{2}$ L ſunt $\div\div$ & proinde A eſt prima è duabus inter D & $\frac{1}{2}$L mediis proportionalibus.

[b] *cor.6. 2 Lect.*
[c] 14.12.
[d] 15,12.

Hinc liquet hoc problema esse ex eorum numero quæ solida vocantur, ad ipsius scilicet solutionem exigens duarum mediarum proportionalium inventionem, qualem præstare nequit communis Geometria, regulam tantùm adhibens & circinum; requiritur ad hoc sectionum conicarum, aut aliarum linearum auxilium, quo multis modis effici possit & effectum est. Sed suppositâ duarum mediarum inventione ceu possibili, problema sic componimus.

Fiat CE. CF :: 2. 3; sintque BC, A, O, CF $\div\div$. Dico esse diametrum sphæræ æqualis cylindro BE. Nam sphæræ A circumscribatur cylindrus GK; & quia A (vel GH). CF :: BC. O :: BCq. Aq (vel GMq). [e] Erit cylindrus GK æqualis cylindro BF. Verùm sphæra A [f] $= \frac{2}{3}$ cylindri GK; & cylindrus BE [g] $= \frac{2}{3}$ BF. Ergò A æquatur cylindro BE. Q.E.F. Hinc emergit,

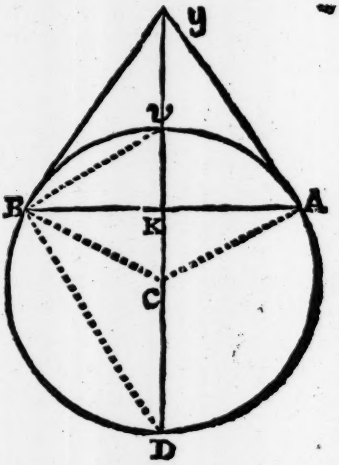
[*] 15. 12.
[f] *Cor.* 6. 2 *Lect.*
[g] *Const* & 14. 12.

Thsor. I. Diameter (A) sphæræ cylindro (BE) æqualis est prima duarum inter diametrum (BC) basis cylindri, & rectam lateris (CE) sesquialteram mediarum proportionalium.

PROBL. II.

Invenire conum æqualem portioni (BVA) sphæræ (BVAD) habentem eandem cum portione basin (BA).

Ana-



Analyſis. Conus quæſitus ſit BYA, cujus altitudo KY=a. Et ſit radius CV, vel CD =r. Et axis KV=b, unde CK=r—b. Et DF=2r—b. Et VBq=2rb (quia DV ×VB=VBq) unde KBq=2rb—bb (ob angulum rectum VKB). Jam quia portio BVA * æquatur cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis æqualis ſuperficiei portionis, id eſt, circulo cujus radius VB, ſubducto tamen hinc cono BCA. Hoc eſt, portio

BVA=cono { alt. r=CV
baſ. ⊙ rad. √2rb=⊙ rad. VB
—cono { alt. r—b=CK
baſ. ⊙ √2rb—bb=⊙ KB

Fac reciprocè { 2rb—bb. 2rb :: r. $\frac{2rr}{2r-b}$
KBq AEq :: CV

* 6. 2 *Lect.*

* 15. 12. * Erítque cono { alt. $\frac{2rr}{2r-b}$; baſ. ⊙ rad. $\sqrt{2rb-bb}$

= cono { alt. r. ; baſ. ⊙ rad. $\sqrt{2rb}$

Itaque port BVA = cono { alt. $\frac{2rr}{2r-b}$; baſ. rad. $\sqrt{2rb-bb}$

— cono { alt. $r-b$; baſ. rad. $\sqrt{2rb-bb}$

* 14. 12. * Hoc eſt port BVA = cono { alt. $\frac{2rr}{2r-b}-r+b$. ; baſ. ⊙ $\sqrt{2rb-bb}$ = ⊙ rad. KB

Unde $a=\frac{2rr}{2r-b}+b-r=\frac{3rb-bb}{2r-b}$

Vel hanc æquationem ad analogiſmum reducendo, a. b :: 3r—b. 2r—b. Hoc eſt,

KY. KV :: DK+CV. DK.

Quod eſt authoris noſtri ipſiſſimum theorema. Nempe,

Theor. II. Conus (BYA) communem habens baſin cum portione ſphærica (BVA), & cujus altitudo (KY) ita ſe habet ad portionis axim (KV) ut compoſita è ſphæræ radio (CV) & reſiduæ portionis axe (DK) ad reſiduæ portionis axem (DK), æquatur portioni (BYA).

Syntheſis & Conſt. Nam quia KY. KV * :: DK+CV. DK. Erit dividendo VY. KV :: CV. DK. Et permutando VY. CV :: KV. DK. Et componendo CY. CV (hoc eſt, cono { baſ. ⊙ rad. KB. ; alt. CY.

cono

cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. CV.}\end{matrix}\right.$ :: DV. DK :: DVq. DBq. (ob DV, DB, DK $\div\div$) :: VEq. KBq: : cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ.}\odot\text{ rad. VB.}\\ \text{alt. CV.}\end{matrix}\right.$ cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. CV.}\end{matrix}\right.$

Unde erit conus $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. CY.}\end{matrix}\right.$ = cono $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. BV.}\\ \text{alt. CV.}\end{matrix}\right.$ = port. BVA + cono BCA. Ergo conus $\left\{\begin{matrix}\text{baſ. rad. KB.}\\ \text{alt. KY.}\end{matrix}\right.$ = port. BVA. Hoc eſt, conus BYA = port. BVA. Q.E.F.

PROBL. III.

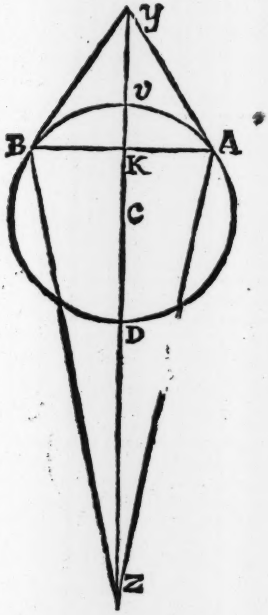
Sphæram (BVAD) plano ſecare, ſic ut portionum effectarum ſuperficies (BVA, BDA) proportionem habeant datam (X ad Y).

Secetur diameter VD in K, ſic ut ſegmenta KV, KD rationem habeant eandem cum data X ad Y, & per K tranſeat planum BA; quódque ſuperficies BVA, BDA ſe habent ut axes KV, KD, hoc eſt, ut X, Y patet è ſupradictis. Quid ergò plura? § *Cor.* 5 1. *Lect.*

Probl.

PROBL. IV.

Analyſis. Datam ſphæram (BVAD) ſecare, ſic ut portiones (BVA, BDA) rationem habeant datam (X ad Y).



Factum ſit à plano BA perpendiculari ad diametrum VD, & ſint $\begin{cases} VD = d. \\ CV = r. \\ DK = a. \end{cases}$

Unde $KV = 2r - a$.

Jam ſi $DK. DK + CV :: KV. KY$.

Hoc eſt, $a. a + r :: 2r - a. KY = \frac{2rr}{}$

$\frac{2rr+ra-aa}{a}$. [h] Erit conus BYA æqualis [h] *2 hujus.*
portioni BVA. Item ſi VK. VK+CV :: KD. KZ. Hoc eſt, $2r-a.\ 3r-a :: a.$
$KZ = \frac{3ra-aa}{2r-a}$. Erit conus BZA æqualis
portioni BDA. [i] Ergo K. Y :: cono BYA, [i] *Hyp. &* 7.5.
cono BZA [k] :: KY. KZ :: $\frac{2rr+ra-aa}{a}$. [k] 14.12.
$\frac{3ra-aa}{3r-a}$. Quare (ducendo in ſe extrema & media) erit $\frac{3xra-xaa}{2r-a} = \frac{zrr+yra-yaa}{a}$
Et (utrumque latus æquationis multiplicando per $2r-a$ & a) erit $3xraa-xa^3-4ry^3-3yraa+ya^3$. Et (per tranſpoſitionem) $3xraa+3yraa-xa^3-ya^3 = 4yr^3$. Et (dividendo utrinque per $x+y$) $3raa-a^3 = \frac{4yr^3}{x+y} = \frac{yrdd}{x+y}$ (ſubſtituendo dd pro 4rr).
Et faciendo $x+y.\ y :: r.\ p = \frac{yr}{x+y}$. Erit $3raa-a^3 = pdd$. Vel reducendo hanc æquationem ad analogiſmum erit $3r-a.$ $p :: dd.\ aa$. Id eſt, $CV+KV.\frac{Y \times CV}{Y+X} :: VDq.DKq.$

Qui ipſiſſimus eſt analogiſmus iſte, ad quem rem deduxit Archimedes; quod ipſum ſatis prodit ac arguit, qualem is analyſin uſurparit. Nam huc eum deveniſſe varias

rias iſtas proportionum compoſitiones, diviſiones, permutationes, ac inverſiones, quales in diſcurſu ſuo oſtentat adhibendo, penè ſupra fidem eſt. Quod ſi feciſſet, caſui potiùs imputandum eſſet quàm rationi vel arti, quòd in genuinas inciderit quæſtionum ſolutiones; & ut hoc adeò conſtanter obtingeret, nullo pacto fieri poteſt aut concipi.

Quod ad ipſum problema ſpectat, liquet ipſum eſſe ſolidum, nec ex iſto genere facillimum effectu. Integram pollicetur author ejus reſolutionem & compoſitionem, ſed non apparet an præſtiterit. Cui ſupplendo defectui nonnullas exhibet Eutocius laborioſas & prolixas conſtructiones, per conicarum nempe ſectionum interſectiones, quas nos omittimus. Concinnam & expeditam tradit excellentiſſimus Hugenius, in libello de conſtructione problematum illuſtrium: vide ſis. Vel adhibeas ipſe generalem Carteſii methodum, quam pro conſtruendis hujuſmodi problematis edocet.

Nihilominus ut eò progrediamur quò proceſſit author, ſuppoſitâ poſſibili hujus analogiſmi effectione, problema ſic componimus:

Fiat X+Y. Y :: CV. P, & ſecetur DV in K, ita ut ſit CV+KV. P :: VDq. KDq; & per K tranſeat planum ipſi VD rectum. Dico factum. Nam fac CV+DK. DK :: KY. KV, & CD+VK. VK :: KZ. KD. Eritque dividendo CV. DK :: VY. KV, & CD. VK :: DZ. KD, & permutando CV. VY :: (DK. KV ::) DZ. CD. Et inverſè componendo CY. CV (CD) :: CZ. DZ. Et componendo tam antecedentes quàm conſequentes,

YZ.

YZ. CZ :: CZ. DZ; unde YZ. DZ :: CZq. DZq :: DVq. DKq (quia priùs erat CD. DZ :: KV. DK, & componendo CZ. DZ :: DV. DK). Atqui erat primò DVq. KDq :: DV + KV. P. Ergò YZ. DZ :: CV + KV. P. Quinetiam fuit CV + VK. VK :: KZ. KD; & proinde per converſionem rationis CV + VK. CV :: KZ. DZ; vel inversè CV. CV + VK :: DZ. KZ. Ergò ex æquo perturbatè, CV. P :: YZ. KZ; id eſt, X + Y. Y :: YZ. KZ. Et diviſim X. Y :: YZ. KZ :: con. BYA. con. BZA (h.e.) :: port. BVA, port. BDA. Q.E.F. *Cor.* 20. 6. *Conſt.* 14. 12.

LEMMA.

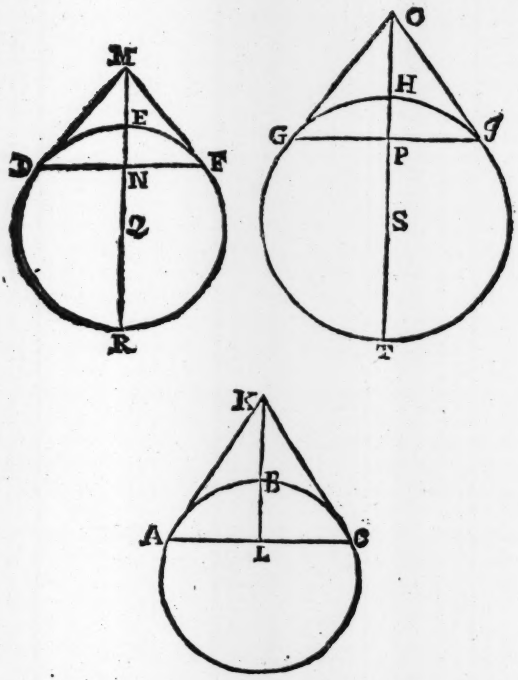
Ponatur coni GOI, DMF æquales ſimilibus ſphæricis portionibus, ſuper iiſdem baſibus conſtitutis GHI, DEF; dico conos hos aſſimilari.

Producantur axes MNR, OPT, & ſint Q, S centra ſphærarum; & quia EN. ND :: HP. PG (ob ſimilitudinem portionum) & ND. NR :: PG. PT; & ex æquo EN. NR :: HP. PT; erit componendo ER. NR :: HT. PT. Et antecedentes dimidiando QR. NR :: ST. PT. Et componendo QR + NR :: NR :: ST + PT. PT. Hoc eſt, MN. EN OP. HP. At priùs erat EN. ND :: HP. PG. Ergò ex æquali MN. ND :: OP. PG. Unde coni DMF, GOI ſunt ſimiles. *2 hujus.*

PROBL. V.

Efficere portionem ſphæricam æqualem datæ portioni (ABC) & ſimilem alteri datæ (DEF).

Ana-



Analyſis. Sit GHI portio quæſita, fiántque coni AKC, DMF, GOI æquales portionibus ABC, DEF, GHI, ſinguli ſingulis ordine. Quare conus GOI [l] = cono AKC; & idcirco [m] ACq. GIq :: PO. LK. Unde $\frac{ACq \times LK}{GIq} = PO$. Item ob [n] ſimilitudinem conorum GOI, DMF eſt DF. NM :: GI. PO :: GI. $\frac{ACq \times LK}{GIq}$ :: GI cub. ACq × LK. Qua-

[l] 1. *Ax.*
[m] 15. 12.
[n] *Lem. Pract.*

pro-

propter $\frac{DF \times ACq \times LK}{NM} = GI$ cub. Et (dividendo utrinque per ACq) $\frac{DF \times LX}{NM} = \frac{GI \text{ cub.}}{ACq}$. Atqui AC, GI, $\frac{GIq}{AC}, \frac{GI \text{ cub.}}{ACq}$ ſunt $\div\div$. Ergò GI eſt prima duarum inter AC, & $\frac{DF \times LK}{NM}$ mediarum proportionalium.

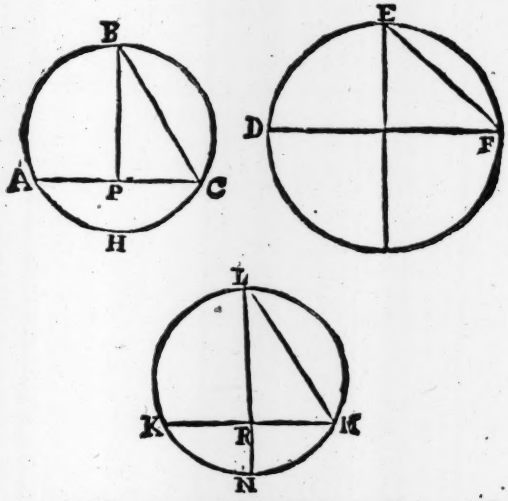
Vides problema eſſe ſolidum, utpote quod requirit duarum mediarum inventionem; quâ ſuppoſita ſic componetur:

Syntheſis. Fiant coni AKL, DMF pares datis portionibus ABC, DEF. Sítque MN. KL :: DF. $Z = \frac{KL \times DF}{MN}$. Et inter AC, Z reperiantur proportione mediæ GI & X; & circa GI deſcribatur portio GHI, continens angulum GHI = angulo DEF. Erit portio GHI, quam deſideras. Nam (faciendo conum GOI portionem GHI parem) quia portiones GHI, DEF ſimiles ſunt, erunt & coni GOI, DMF ſimiles. Unde PO. GI :: MN. DF :: KL. Z. Et permutando PO. KL :: GI. Z :: AC. X :: ACq. GIq (quia AC, GI, X, Z ſunt $\div\div$). Quare reciprocam habentes baſium & altitudinum proportionem, coni GOI, AKC æquantur, & proinde portiones GHI, ABC æquantur. Q.E.F.

Probl.

PROBL. VI.

Datis duabus portionibus ſphæricis (ABC, DEF) invenire ſphæricam portionem ſimilem earum uni (ABC), & ſuperficiem habentem alterius (DEF) ſuperficiei parem.



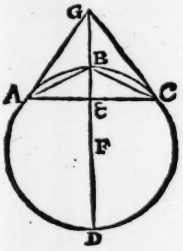
Analyſis. Sit portio KLM qualis expoſitur. Unde ob ſuperficierum KLM, DEF æqualitatem, circulus radio LM æquatur circulo ad radium EF, adeóque LM = EF. Item ob portionum KLM, ABC ſimilitudinem, eſt BC. BH: : LM. (EF). LN. Hinc componetur ſic; Fac BC. BH: : EF. LN. Et ſit LN diameter ſphæræ, ſecetur LN in R, ita ut ſit BP. PH :: LR. RN. Et per R tranſeat planum KM ad LN perpendiculare. Liquet portionem KLM ipſi ABC ſimilem eſſe,

&

& eſſe LM. LN :: BC. BH :: EF. LN. Unde LM = EF. Atque circulus radio LM exæquat circulum radio EF; h. e. ſphærica ſuperficies KLM ſuperficiem ABC. Q.E.D.

PROBL. VII.

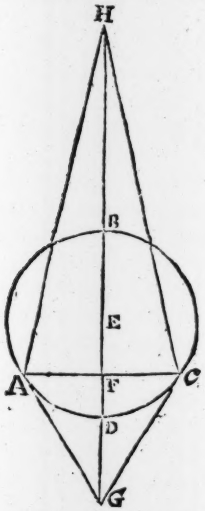
A data ſphæra (ABCD) portionem plano abſcindere, ita ut portio ad conum ſuper eadem baſi, & æquè altum habeat aſſignatam rationem (Y ad X).



Portio quæſita ſit ABC, & conus etiam ABC, quibus communis altitudo BE; in qua protracta ſit ſphæræ centrum F. Ponatúrque conus AGC par portioni ABC. Unde FD+ED. ED :: EG. EB : : cono AGC. cono ABC : : Y. X. Et dividendo FD. ED :: Y—X. X. Componitur autem ſic; Fac Y—X. X :: FD. ED (& conſequenter Y. X : : FD+ED. ED) & per E ſecetur ſphæra plano AC ad BD recto; & faciendo conum AGC = port. ABC, erit GE. BE (id eſt, con. AGC, ABC) : : FD+ED. ED : : Y. X. Unde port. ABC. con. ABC :: Y. X. Q.E.F.

PROBL. VIII.

Sphærâ ABCD per planum AC divisâ, superficierum & soliditatum ABC, ADC proportiones inter se comparare.



Si fiat conus AHC = port. ABC, & conus AGC = port. ADC; [o] evidens est portionum ABC, ADC rationem eandem esse cum ratione HF ad GF; [p] & proportionem superficierum ABC, ADC eandem esse cum ratione axium BF. FD; hæ igitur rationes comparandæ sunt. Et quia HF. BF [q] :: R + DF. DF. Et divisim HB. BF :: R. DF [r] □ BF. R. (quia Rq [*] □ BF × DF = FAq). Unde HB × [s] R □ BFq. [†] & HB □ BF. Est autem R + BF. BF [q] :: FG. FD. Et permutando R + BF. FG :: BF. DF [t] :: HB. R [r] □ HF (HB + BF) R +

[o] 14. 12.
[p] 5 *Cor* 9. 1 *Lect.*
[q] 2 *hujus.*
[r] 1 *Lem. infra.*
[*] 5. 2.
[s] 14. 5.
[t] *Supra & permutando*

R-|-BF. [t] Quare Qu. R-|-BF □ HF × FG. [t] *Lem. infra.*
[*] Unde Qu. R-|-BF. FGq □ HF × FG. FGq ;
[†] hoc est, BFq. DFq □ HF. FG. Id est, [*] 8. 5.

Concl. 1. Portiones ABC, ADC minorem habent rationem duplicatâ ratione superficierum. [†] *Supra* & 1. 6.

Porrò, faciendo Xq = HB × R [*] □ BFq. [*] *Priùs.*
Quia HB. X [u] :: X. R. Et componendo [u] 17. 6.
HB-|-X. X-|-R :: X. R ; [x] erit Qu. HB-|- [x] 22. 6.
X. Qu. X -|- R :: Xq. Rq. [y] : : HB. R. Sed [y] 20. 6.
HF (HB-|-BF) R-|-BF. [*] □ HB-|-X. R-|-X [*] 3 *Lem.*
(quia X [z] □ BF). Quare HFq. Qu. R-|- [z] *Supra.*
BF □ HB. R. [z] :: R-|-BF. FG. Pone Z, R -|- BF, Y, FG esse ÷÷. Unde Zq. Qu. R -|-BF [y] :: Z. Y : : R-|-BF. FG □ [a] HFq. [a] *Priùs.*
Qu. R-|-BF. [b] Ergò Z □ HF. Verùm ratio Z ad FG est sesquialtera rationis R-|-BF [b] 10. 5.
ad FG. [c] Ergo proportio HF ad FG major est sesquialterâ rationis R-|-BF ad FG, [c] 8. 5.
vel rationis BF ad DF. Id est,

Concl. 2. ABC, ADC habent rationem majorem sesquialterâ rationis, quam habent ipsarum superficies ABC, ADC.

Lemmata. Assumptum est, 1. Si HB. BF □ BF. R. esse HB × R □ BFq. Id quod sic 10. 5.
ostenditur : Sit A. B □ C. D, dico esse AD □ BC. Nam puta A. B :: C. E. [*] Ergò E □ D, ergò AD □ AE = BC.

Simili discursu, si A. B □ C. D. erit AD □ BC.

Et inversè si AD □ BC, erit A.B □ C.D.

2. Si HB □ R. assumendo quamvis BF, erit HB. R □ HB -|- BF. R -|- BF. Sit inquam A □ B, & quævis C, dico esse A.B □ A □ C. E-|-□. Nam ob A □ B erit C. B 8. 5.

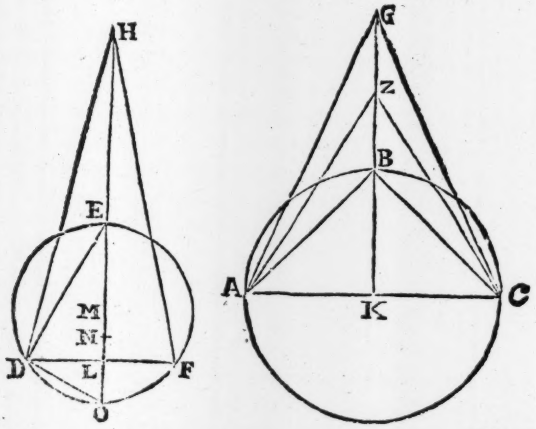
⊏CA; & componendo C-|-B, B⊏C-|-A. A. & permutando C-|-B. C-|-A⊏B. A. Et retrogradè A.B⊏C-|-A. C-|-B.

3. HB-|-BF. R-|-BF⊏HB-|-X. R-|-X, X⊏BF. Nam ob HB *⊏R, eſt HB×X —BF⊏R×X—BF: hoc eſt, HB×X—HB×BF⊏RX—R×BF. Quare tranſponendo HB×X-|-R×BF⊏RX-|-HB×BF. Ergò addendo utrinque HB×R-|-BF×X, erit HB×X-|-R×BF-|-X×BF⊏RX-|-R×HB-|-HB×BF-|-X×BF. Hoc eſt, HB-|-BF×R-|-X⊏R-|-BF×HB-|-X. Ergò per 1. Lemma.

* *Priùs.*

PROBL. IX.

Superficie hemiſphærii (AB C) poſitâ æqualì ſuperficiei portionis (DEF), ipſarum portionum ſoliditates comparare, (vel utrum ſit ABC, an majus indagare hemiſphærium portio DEF).



Fiant

Fiant coni ABC, DHE æquales portionibus ABC, DEF. [d] Quare [e] KG = 2KA, [f] & EM + LO. LO :: LH. LF. Ponatur EM = t, & KA = s. Quare BA (vel ED, quia ſuperficies ſupponuntur æquales) & $\sqrt{2ss}$, & ob OE, ED, EL, hoc eſt, 2t, $\sqrt{2ss}$, $\frac{ss}{t}$ ∴ ∴) EL = $\frac{ss}{t}$. Atqui t, s, $\frac{ss}{t}$ ſunt ∴ ∴. Ergò faciendo EN = AK = s, erit punctum N inter M & L. Et EN × NO [g] EL × LO, hoc eſt, s × : 2t — s (2ts — ss) □ $\frac{ss}{t}$ × 2t — $\frac{ss}{t}$ (2ss — $\frac{s4}{tt}$). Et (addendo ss utrinque)

2ts □ 3ss — $\frac{s4}{tt}$ = 3t — $\frac{ss}{t}$ × : $\frac{ss}{t}$ = EM + LO × LE = LO × LH = 2t — $\frac{ss}{t}$ × LH. Hinc cùm 2s × t □ 2t — $\frac{ss}{t}$ × LH, erit 2s. LH □ 2t — $\frac{ss}{t}$. t :: 2ss — $\frac{s4}{tt}$. ss. Id eſt, KG. LH □ LDq (EL × LO) KAq. Unde poſito KZ. LH :: LDq. KAq, [h] erit KG □ KZ. Verùm (ob reciprocam proportionem) [i] eſt conus AZC æqualis cono DHF. Ergò conus AGC, hoc eſt, portio ABC, major eſt cono DHF, hoc eſt, portione DEF. Unde

[d] *M centrum ſphæræ DEFO.*
[e] *cor. 6. 2 Lect. & 14. 12.*
[f] *2. hujus.*
[g] *5. 2.*
[h] *10. 5.*
[i] *15. 12.*

Omnium ſphæricarum ſuperficierum ſub æqualibus ſuperficiebus comprehenſarum maximum eſt hemiſphærium. Nam

Theor. Zyl. Archim. II.

Nam quia $2ENq$ [k] $=$ $2KAq$ [l] $=$ EAq [m] $=$ $ED \times$ [n] $= SO \times EL$. [k] $2EM \times EL$, erit $ENq = EM \times EL$. Quare $EN \sqsupset EM$. Ergò $EN \times NO$ [p] $\sqsubset EL \times LO$. Additis igitur æqualibus FNq & $EM \times EL$; [q] est $EN \times EO$ [r] $(EN \times NO + ENq) \sqsubset EL \times LO +$ $EL \times EM$ [s] $= LH \times LO$ [t] (quia $EM + LO$. $LO :: LH. LE$). Quare $EN. LH$ [u] $\sqsubset LO. EO :: ODq. EOq$ [x] $:: DLq. EDq$ [y] $:: DLq. 2KAq$. Et antecedentes duplicando $2EN (KG). LH \sqsubset 2DLq. 2KAq :: DLq. KAq$. Fiat $KZ. LH :: DLq. KAq$; [z] eritque $KZ \sqsupset KG$. [a] Et consequenter conus AZC minor est cono AGC; hoc est, conus DHF minor cono AGC, [b] vel portio DEF minor portione ABC. Q.E.D.

k *Conſt.*
l 47.1.
m *Conſt.* & 9.1. *Lect.* & *Cor.* 2. 12.
n *Cor.* 8. & 17.6.
o 5.2.
p 2. *ax.*
q 3.2.
r 16.6.
s 2 *hujus.*
t 1 *Lemma præc.*
u *Cor.* 8. & 20.6.
x *Cor.* 8. & 22.6.
y 7.5. & *ſupra.*
z 10.5.
a 14.12. & 14.5.
b *Conſt.*

Hoc ſecundi libri poſtremum eſt theorema; itaque propoſito defunctus ſum, & manum ſumo de tabula.

FINIS.